מבוא לקומבינטוריקה (88554) \ ד"ר רון עדין
תשובות לשאלות בחינה תשס"ב (מועדים א', ב')

מועד א'

.1
א) $\binom{200}{100}$
ב) $\binom{199}{100}$

.2
א) $c=-2$. הסבר: כדי לקבל פתרון שהוא פולינום, ללא חלק מעריכי, צריך $x=1$ להיות שורש כפול של הפולינום האופייני.
ב) $a_n = 2n+1 \quad (n\ge 0)$

.3
א) פעולת החיבור $100+100=200$, בכתיבה לפי בסיס 7, היא $202+202=404$. אין נשא באף עמודה, ולכן המקדם $\binom{200}{100}$ אינו מתחלק ב- 7.
ב) יש לבדוק התחלקות בחזקות 2 ובחזקות 5. ברור שחזקת 5 קטנה יותר, ולכן היא הקובעת. פעולת החיבור $100+100=200$, בכתיבה לפי בסיס 5, היא: $400+400=1300$. ישנה עמודה אחת עם נשא, ולכן המקדם הבינומי מתחלק ב- 5^1, ולכן ב- 10^1.

.4 $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k}{n}(-x)^n = (1-x)^{-k}$. מציבים $x=1/2$.

.5 שימוש בנוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל. כאן: $U=\{1,\dots,6\}^n$, $A_i=\{(x_1,\dots,x_n)\in U \mid x_k\ne i\ (\forall k)\} \quad (1\le i\le 6)$. לכן

$$p=\frac{e_3}{|U|}=\frac{1}{6^n}\cdot\sum_{k=3}^{6}(-1)^{k-3}\binom{k}{3}s_k=\frac{1}{6^n}\cdot\sum_{k=3}^{6}(-1)^{k-3}\binom{k}{3}\binom{6}{k}(6-k)^n$$

מועד ב'

1.

א) $\binom{119}{9}$

ב) מחפשים את מקדם x^{120} בביטוי $(1-x)^{-10}\left(1-x^{101}\right)^{10}=\left(1+x+\ldots+x^{100}\right)^{10}$.

<u>תשובה:</u> $\binom{129}{9}-10\binom{28}{9}$.

2. פתרון הנוסחה הראשונה הוא: $a_n=-7+\alpha\cdot 2^n$. כדי להתאים לנוסחה השניה, צריך $-7=-7\cdot 1^n$ לייצג את הפתרון ההומוגני (ולכן $c=-1$) ואילו $\alpha\cdot 2^n$ לייצג פתרון פרטי לא-הומוגני (ולכן $\alpha=6$). <u>תשובה:</u> $a_n=-7+6\cdot 2^n$; $a_0=-1, a_1=5$.

3. בפעולת החיבור $a+b+c$, בבסיס p, יש עמודה עם נשא.

4. פתרון המשוואה הריבועית: $f(x)=-(1-x)\pm\sqrt{(1-x)^2-x^2}=(x-1)\pm\sqrt{1-2x}$. יש לקחת סימן פלוס לפני השורש, כדי לקבל $f_0=0$. לכן $(n\geq 2)$ $\quad f_n=\binom{1/2}{n}(-2)^n=\frac{-(2n-2)!}{2^n(n-1)!n!}=\frac{-1}{2^n n}\binom{2n-2}{n-1}$. כמובן, $f_0=f_1=0$.

5. שימוש בנוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל: $U=\{0,\ldots,9\}^{100}$; A_i היא קבוצת המספרים ב-U שאינם מכילים את הספרה i $(0\leq i\leq 9)$. לכן:

$$p=\frac{e_0}{|U|}=\frac{1}{10^{100}}\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}(10-i)^{100}.$$