נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל
Inclusion-Exclusion Formula

מוטיבציה :
בהינתן קבוצות סופיות $A_1, A_2, ..., A_n$, מהו גודל האיחוד שלהן $A_1 \bigcup A_2 \bigcup ... \bigcup A_n$ כאשר נתונים גודליהן וגודלי כל החיתוכים שלהן?

דוגמאות :
(א) ל-2 קבוצות: $|A_1 \bigcup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \bigcap A_2|$
(ב) ל-3 קבוצות: $|A \bigcup B \bigcup C| = (|A| + |B| + |C|) - (|A \bigcap B| + |A \bigcap C| + |B \bigcap C|) + |A \bigcap B \bigcap C|$

המשלים של האיחוד (בתוך קבוצה גדולה U) הוא, בעצם, קבוצת איברי U שאינם מופיעים באף אחת מהקבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$.

שאלת המשך : מהו מספר האיברים המופיעים בדיוק באחת מהקבוצות? (נניח 3 קבוצות A, B, C).
תשובה :

$$|A| + |B| + |C| - 2(|A \bigcap B| + |A \bigcap C| + |B \bigcap C|) + 3|A \bigcap B \bigcap C|$$

ננסה לפתור באופן כללי.

סימונים :
$A_1, A_2, ..., A_n$ = קבוצות סופיות המוכלות כולן בקבוצה סופית U.

$$E_k := \left\{ x \in U \;\middle|\; \text{נמצא בדיוק ב } x \ k- \text{ מהקבוצות } A_1, A_2, ..., A_n \right\} \qquad (0 \le k \le n)$$

למשל : $E_n = A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ (x נמצא בכל n הקבוצות.)

$E_0 = U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n)$ (x לא נמצא באף קבוצה ולכן נמצא במשלים של האיחוד שלהן.)

כמובן: $U = E_0 \dot{\bigcup} E_1 \dot{\bigcup} ... \dot{\bigcup} E_n$ (איחוד זר)

מטרתנו : לחשב את $e_k := |E_k|$ כשנתונים גודלי כל החיתוכים:

$$|A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_i}| \qquad (1 \le j_1 < j_2 < ... < j_i \le n)$$

למשל: $j_1 = 2,\ j_2 = 7,\ j_3 = 10 \qquad |A_2 \cap A_7 \cap A_{10}|$

נסמן: $(1 \le i \le n) \qquad s_i := \sum_{1 \le j_1 < j_2 < ... < j_i \le n} |A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap ... \cap A_{j_i}|$

(סכום גודלי כל החיתוכים של i מהקבוצות $A_1, A_2, ..., A_n$.)

נסמן גם: $s_0 := |U|$

<u>משפט</u> : (נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל)

$$e_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} s_i \quad (0 \le k \le n)$$

במפורש:

$$e_k = \binom{k}{k} s_k - \binom{k+1}{k} s_{k+1} + \ldots \pm \binom{n}{k} s_n$$

בפרט, עבור $k = 0$:

$$e_0 = s_0 - s_1 + s_2 - \ldots + (-1)^n s_n$$

זהו מספר אברי U שאינם נמצאים באף אחת מ- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ זה בדיוק $U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$

לכן (כזכור: $s_0 := |U|$): $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = s_1 - s_2 + s_3 - \ldots + (-1)^{n-1} s_n$.

<u>הוכחת המשפט</u> : (באמצעות פונקציות יוצרות)

נחשב את s_i באמצעות e_k (מספר האיברים שנמצאים בדיוק ב- k מהקבוצות).

ניקח איבר $x \in E_k$, ז"א: x נמצא בדיוק ב- k מהקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

$s_i =$ סכום גדלי כל החיתוכים של i מהקבוצות.

כמה פעמים מופיע x בסכום s_i?

אם $k < i$ אז x לא מופיע בכלל.

אם $k \ge i$ אז x מופיע בחיתוך של כל i מתוך k "הקבוצות שלו" (ורק שם).

מספר ההופעות הוא: $\binom{k}{i}$ (זה נכון גם ל- $k < i$, שאז $\binom{k}{i} = 0$.)

<u>מסקנה</u> :

$$s_i = \sum_{k} (\text{תרומות איברי } E_k) = \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} e_k \qquad (0 \le i \le n)$$

בפרט: $s_0 = |U| = e_0 + e_1 + \ldots + e_n$

קיבלנו: $$s_i = \sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} e_k \qquad (0 \le i \le n) \qquad (*)$$

אנו רוצים להפוך את הנוסחה ולהביע את e_k באמצעות s_i.

נגדיר פונקציות יוצרות (<u>פולינומים</u> ב- x) :

$$e(x) = \sum_{k=0}^{n} e_k \, x^k$$

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n} s_i \, x^i$$

נרשום את (*) בעזרת $s(x), e(x)$:

$$s(x)=\sum_{i=0}^{n} s_i\ x^i=\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}e_k\right)x^i=\sum_{\substack{i,k\\0\le i\le k\le n}}\binom{k}{i}e_k x^i$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}e_k x^i=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i\right)}_{\text{נוסחת הבינום}}e_k=\sum_{k=0}^{n}(x+1)^k e_k=e\,(x+1)$$

קיבלנו: $s(x)=e\,(x+1)$.

<u>הערה</u> **:** ההצבה $x\to x+1$ אינה חוקית בטור חזקות פורמלי כללי (בגלל בעיות התכנסות), אבל חוקית כהצבה <u>בפולינום</u> $e(x)$.

$$s(x)=e\,(x+1)$$
$$e(x)=s\,(x-1)$$

נחשב:

$$s(x-1)=\sum_{i=0}^{n} s_i\ (x-1)^i=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}(-1)^{i-k}x^k s_i=\sum_{0\le k\le i\le n}=\sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\ (-1)^{i-k}s_i\right]x^k=$$

$$e(x)=\sum_{k=0}^{n}e_k x^k$$

נשווה את מקדמי x^k: $(0\le k\le n)$ $e_k=\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}\ (-1)^{i-k}s_i$

וזו הנוסחה המבוקשת. מש"ל.

<u>דוגמה 1</u> : (*derangements* , "איסדורים")

דוור מחלק n מכתבים ל- n תיבות (מכתב לתיבה).
החלוקה אקראית (תמורה אקראית $\pi\in S_n$).

i	1	2	3	4	**5**	6
$\pi(i)$	3	6	1	2	**5**	4

מה ההסתברות שאף מכתב לא יגיע למענו (ז"א: $\pi(i)\ne i$ לכל i)?

$$\text{ההסתברות}=\frac{\text{מספר התמורות הרצויות}}{\text{מספר התמורות הכללי }(n!)}$$

<u>טענה</u> : ההסתברות היא, בקירוב טוב: $\sim\frac{1}{e}\sim 0.367879441$

<u>הוכחה</u> **:** נשתמש בנוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל.
נגדיר: $(1\le i\le n)$ $A_i:=\{\pi\in S_n\,|\,\pi(i)=i\}$
זהו אוסף כל חלוקות המכתבים שבהן מכתב i מגיע למענו (i נקודת שֶׁבֶת של π).

למשל: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in A_5$

אצלנו: (כל התמורות) $U = S_n$

אנו מחפשים את מספר התמורות π שעבורן $\pi(i) \neq i$ לכל i, ז"א: $\pi \notin A_i$ לכל i.

בסימונים שלנו: מחפשים את e_0.

נציב בנוסחה:

$$e_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{i}{0} (-1)^{i-0} s_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s_i$$

נחשב את s_i (סכום גדלי החיתוכים של i מהקבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_n$).

$$\left|A_j\right| = (n-1)! \quad (\forall j)$$

באיבר j השתמשנו ולכן מה שנותר הוא לסדר עוד $(n-1)!$ אפשרויות (איברים).

$$\left|A_{j_1} \cap A_{j_2}\right| = (n-2)!$$

וכן הלאה...

$$s_i = \underbrace{\binom{n}{i}}_{\text{מספר הדרכים לבחור } i \text{ קבוצות}} \underbrace{(n-i)!}_{\text{גודל חיתוך של } i \text{ קבוצות}}$$

<u>מסקנה</u> **:**

$$e_0 = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i s_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{n!}{i!} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

ההסתברות המבוקשת:

$$\frac{\text{מספר התמורות הרצויות}}{\text{מספר התמורות הכללי}} = \frac{e_0}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-1} \quad \text{(מהר)}$$

<u>דוגמה 2</u> : (פונקצית φ של אוילר)

יהי n מספר טבעי. מהו מספר המספרים הקטנים או שווים ל- n וזרים לו?

כאן נגדיר:

$$U := \{ m \text{ טבעי} \mid 1 \leq m \leq n \}$$

נניח שפירוק n למכפלת ראשוניים הוא

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$$

כאשר $p_1,\ldots,p_k$ ראשוניים שונים. נגדיר:

$$A_i := \{m \in U \mid m \text{ מחלק את } p_i\} \qquad (1 \le i \le k)$$

קל לראות כי

$$|A_i| = \frac{n}{p_i} \qquad (1 \le i \le k)$$

ובאופן כללי

$$|A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_i}| = \frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_k}} \qquad (1 \le j_1 < \ldots < j_i \le n)$$

לכן, לפי נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל:

$$e_0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i s_i = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_i \le n} \frac{n}{p_{j_1} \cdots p_{j_i}} = n \cdot \prod_{t=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_t}\right)$$

גודל זה, שהוא מספר המספרים עד n שהם זרים ל-n, מסומן: $\varphi(n)$ (פונקצית φ של אוילר).

למשל:

$$\varphi(1) = 1$$

עבור $n = p$ ראשוני:

$$\varphi(p) = p - 1$$

עבור $n = p^a$ (חזקת ראשוני):

$$\varphi(p) = p^{a-1}(p-1)$$

וכן, לדוגמא:

$$\varphi(40) = \varphi(2^3 5^1) = 40 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 16$$

---סוף ההרצאה---