נוסחאות נסיגה

דוגמא : בכמה דרכים ניתן לכסות לוח בגודל $2\times n$ ע"י אבני דומינו?
נסמן את מספר הדרכים ב- a_n
נחשב תחילה לערכי n קטנים:

n	1	2	3	4	5	6
a_n	1	2	3	5	8	13

מה הלאה?

טענה :

$$(1)\quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

הוכחה :
בכיסוי לוח $2\times n$ נתבונן בעמודה הראשונה:
או שהיא מכוסה ע"י אבן אחת אנכית, ואז את היתר אפשר לכסות ב- a_{n-1} דרכים:
או שהעמודה מכוסה ע"י שתי אבנים (אופקיות), ואת היתר ניתן לכסות ב- a_{n-2} דרכים.
לכן $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. מש"ל.

הערה : אפשר להגדיר $a_0 = 1$ ואז הנוסחה (1) נכונה גם עבור $n = 2$.
נוסחה (*) היא דוגמה לנוסחת נסיגה (רקורסיה).

דוגמאות נוספות לנוסחאות נסיגה :

$$(2)\quad a_n = na_{n-1}$$

$$(3)\quad a_n = a_{n-1} + \ldots + a_1$$

$$(4)\quad a_n = a_{n-1}^2 + 7a_{n-3}$$

בנוסחאות (1), (2), (3) הן לינאריות. (בניגוד ל-(4))
נוסחה (1), בניגוד ל-(2) ו-(3), היא לינארית עם מקדמים קבועים (לא תלויים ב- n).
הצורה הכללית של נוסחת נסיגה ליניארית עם מקדמים קבועים:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k} + f(n) \quad (n \geq k)$$

כאשר $k, c_1, \ldots, c_k$ מספרים קבועים (לא תלויים ב- n). (בנוסחה (3) k תלוי ב- n.)
$f(n)$ יכול להיות תלוי ב- n (הוא לא נחשב למקדם של הנוסחה).
אם $c_k \neq 0$ אומרים שזו נוסחת נסיגה מסדר k.
אם $f(n) = 0$ לכל n, זו נוסחת נסיגה הומוגנית.

<u>דוגמא</u> :

$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-6} + \frac{1}{2}a_{n-7} + n^2$ זו נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית (עם מקדמים קבועים) מסדר 7.

סדרה $\left(a_n\right)_{n=0}^{\infty}$ המקיימת נוסחת-נסיגה ליניארית מסדר k נקבעת ע"י k תנאי התחלה: ערכי $a_0, a_1, ..., a_{k-1}$.

למשל אצלנו: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$

עם תנאי התחלה: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

(בחרנו $a_0 = 1$ כדי שהנוסחה תתקיים גם ל- $n = 2$)

הסדרה המתקבלת נקראת סדרת פיבונאצ'י (*Fibonacci*): $1,1,2,3,5,8,13,21,...$

בעזרת נוסחת הנסיגה אפשר, עקרונית, לחשב את כל איברי הסדרה; אבל לא ברור, למשל, <u>קצב הגידול</u> שלהם (פולינומיאלי? מעריכי?).

ננסה לפתור את הנוסחה $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ בצורה אחרת.

נגדיר את הפונקציה היוצרת $a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נכפול את נוסחת הנסיגה (1) ב- x^n, ונסכם על כל $(n \geq 2)$ (התחום שבו נוסחת הנסיגה מתקיימת) : $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$

כדי לתאם בין האינדקס של a לחזקה של x נוציא x או x^2 מחוץ לסכום:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}$$

או, בשינוי הינדקס הרץ (n במקום $n-1$ או $n-2$):

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

הסכום באגף שמאל הוא בעצם $a(x)$, פחות המחוברים $a_0 + a_1 x$. דשאר הסכומים דומים:

$$a(x) - a_0 - a_1 x = x\left[a(x) - a_0\right] + x^2 a(x)$$

ולכן $\left(1 - x - x^2\right) a(x) = a_0 + a_1 x - a_0 x$

בעזרת תנאי ההתחלה $a_0 = a_1 = 1$ נקבל פונקציה יוצרת מפורשת: $a(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$

זוהי פונקציה רציונלים. אפשר לפרק אותה לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{c_1}{1-\alpha_1 x}+\frac{c_2}{1-\alpha_2 x}$$

כאשר:
$$1-x-x^2=(1-\alpha_1 x)\cdot(1-\alpha_2 x)$$

ז"א: $x=\frac{1}{\alpha_1},\quad x=\frac{1}{\alpha_2}$ הם שרשי הפולינום $1-x-x^2$.

בניסוח אחר: $\left(t=\frac{1}{x}\right)$ $t=\alpha_1$, $t=\alpha_2$ הם שורשי הפולינום t^2-t-1,

ז"א:
$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\doteq 1.618$$
$$\alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\doteq -0.618$$

$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ נקרא <u>יחס הזהב</u> (golden ratio).

את המקדמים c_1, c_2 אפשר למצוא בשיטות שונות. למשל, אם נכפיל ב- $(1-\alpha_1 x)$ את השוויון

$$\frac{1}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)}=\frac{c_1}{1-\alpha_1 x}+\frac{c_2}{1-\alpha_2 x}$$

נקבל:
$$\frac{1}{(1-\alpha_2 x)}=c_1+\frac{c_2(1-\alpha_1 x)}{1-\alpha_2 x}$$

וע"י הצבת $x=\frac{1}{\alpha_1}$ נקבל:

$$c_1=\frac{1}{1-\alpha_2/\alpha_1}=\frac{\alpha_1}{\alpha_1-\alpha_2}$$

ובאופן דומה:
$$c_2=\frac{1}{1-\alpha_1/\alpha_2}=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}$$

נחזור לפונקציה היוצרת ונחשב אותה כטור חזקות פורמלי:

$$a(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\frac{c_1}{1-\alpha_1 x}+\frac{c_2}{1-\alpha_2 x}=$$
$$=c_1\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1 x)^n+c_2\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_2 x)^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(c_1{\alpha_1}^n+c_2{\alpha_2}^n\right)x^n$$

לכן:
$$a_n=c_1{\alpha_1}^n+c_2{\alpha_2}^n\qquad(n\ge 0)$$

<u>הערה:</u> בדיעבד, ניתן להגיע לפתרון במקרה זה (ובמקרים דומים) גם ללא פונקציות יוצרות.
ננסה לנחש פתרון <u>מעריכי</u> לנוסחה הנסיגה, מהצורה

$$(n \geq 0) \quad a_n = c\alpha^n \quad \text{כאשר} \quad c, \alpha \neq 0$$

ע"י הצבה בנוסחת הנסיגה (1): $c\alpha^n = c\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2}$

ז"א: (ע"י חילוק ב- $c\alpha^{n-2}$): $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

מקבלים: $\alpha_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

קל לראות שאוסף כל הסדרות (הממשיות) הפותרות את (1) הוא מרחב וקטורי (מעל $\Re$), ולכן יחד עם $\alpha_1{}^n, \alpha_2{}^n$ גם הסדרה $a_n = c_1\alpha_1{}^n + c_2\alpha_2{}^n$ היא פתרון. מכיוון שממד מרחב הפתרונות הוא 2 (ראה משפט להלן) זהו <u>הפתרון הכללי</u>.

<u>משפט:</u> תהי נתונה נוסחת-נסיגה ליניארית הומוגנית מסדר k. אוסף כל הסדרות (a_n) שהן פתרונות שלה הוא מרחב וקטורי ממימד k.

ננחש פתרון למשוואה מהצורה $(n \geq 0)$ $a_n = c \cdot \alpha^n$, $c, \alpha \neq 0$.
נציב בנוסחה $c\alpha^n = c\alpha^{n-1} + c\alpha^{n-2}$ ונחלק ב- $c\alpha^{n-2}$. נקבל: $\alpha^2 = \alpha + 1$
פתרונות המשוואה הריבועית $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ הם:

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \alpha_1 \approx 1.618 \\ \alpha_2 \approx -0.618 \end{cases}$$

(1.618: <u>יחס הזהב</u>).

קיבלנו כפתרונות לנוסחת-הנסיגה: $c_1\alpha_1^n$ (c_1 כלשהו), $c_2\alpha_2^n$ (c_2 כלשהו).

<u>טענה</u> **:** אוסף כל הפתרונות $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ של נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית (לאו דווקא עם מקדמים קבועים) היא מרחב וקטורי, ז"א: סכום פתרונות הוא פתרון וכפל פתרון בקבוע הוא פתרון.
ולכן אצלנו גם (c_1, c_2 קבועים כלשהם)

$$a_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n$$

הוא פתרון ל-(*). זהו <u>הפתרון הכללי</u> לנוסחה מסדר k, בפתרון הכללי יש k "דרגות-חופש" =מקדמים חופשיים. ואצלנו זו נוסחה <u>מסדר 2</u>. המקדמים c_1, c_2 נקבעים ע"י תנאי ההתחלה.

למשל, אצלנו: $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ $(n \geq 0)$ $a_n = c_1\alpha^n + c_2\alpha^n$.

נציב תנאי התחלה:

$$1 = a_0 = c_1 + c_2$$
$$1 = a_1 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2$$

קיבלנו מערכת משוואות ליניאריות בנעלמים c_1, c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 = 1 \end{cases}$$

פותרים ומקבלים:

$$c_1 = \frac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha_1$$
$$c_1 = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha_2$$

ולכן מספרי פבונאצ'י:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha_1^{n+1} - \alpha_2^{n+1}\right) \quad (n \ge 0)$$

למשל:

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 1$$

מנוסחת הנסיגה ברור ש- a_n הוא שלם חיובי (לכל n). מהנוסחה המפורשת עולה ש- a_n גדל באופן <u>מעריכי</u>,

$a_n \sim \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha_1^{n+1}$ (כי $\alpha_1 \sim 1.618$, $|\alpha_2| \sim 0.618 < \alpha_1$).

פירוש הסימון "~": $a_n = \left[1 + \circ(1)\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha_1^{n+1}$ ז"א: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{\sqrt{5}}\alpha_1^{n+1}} = 1$

יתר על כן, אפילו: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha_1^{n+1} + \circ(1)$ (כי $|\alpha_2| < 1$), ז"א: $\lim_{n\to\infty}\left(a_n - \frac{1}{\sqrt{5}}\alpha_1^{n+1}\right) = 0$

<u>מתכון כללי</u> :

נוסחת נסיגה ליניארית הומוגנית עם מקדמים קבועים:

$$a_n + p_1 a_{n-1} + \ldots + p_k a_{n-k} = 0 \quad (n \ge k)$$

רושמים את <u>הפולינום האופייני</u> : $x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_{k-1}x + p_k = 0$

מוצאים את k השורשים (המורכבים) שלו: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. בהנחת שכולם שונים, רושמים פתרון כללי: $a_n = c_1\alpha_1^n + c_2\alpha_2^n + \ldots + c_k\alpha_k^n$.

מוצאים את המקדמים $c_1, c_2, \ldots, c_k$ בעזרת k תנאי-ההתחלה (ערכי $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$).

<u>דוגמה</u> :

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \\ a_0 = 1, \quad a_1 = 3 \end{cases} \qquad (n \ge 2)$$

<u>פתרון</u> :

נעביר הכל לאגף שמאל: $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0$

פולינום אופייני: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$.

שרשי הפולינום: $\alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 2$.
פתרון כללי: $a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n$.

עכשיו נציב תנאי התחלה: $\begin{cases} n=0: & c_1 + c_2 = 1 \\ n=1: & c_1 + 2c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow c_1 = -1, \ \ c_2 = 2$.

<u>תשובה</u> : $a_n = -1 + 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} - 1$
<u>בדיקה</u> : $a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = (2^{n+1} - 1) - 3(2^n - 1) + 2(2^{n-1} - 1) = 0$
נוסחה לא הומוגנית.

<u>דיון נוסף:</u>
א) מציאת שרשי פולינום.
ב) שורשים כפולים לפ"א.
ג) דוגמאות של אגפי ימין לא הומוגניים.

<u>מקרים מיוחדים:</u>
<u>דוגמה</u> : (שורשים כפולים)
נניח שהפולינום האופייני הוא:

יש פה שורש כפול:
$$(\alpha - 5)^2 (\alpha - 3) = 0$$
$$\alpha_1 = \alpha_2 = 5, \quad \alpha_3 = 3$$

אם נכתוב: $a_n = c_1 \cdot 5^n + c_2 \cdot 5^n + c_3 \cdot 3^n = (c_1 + c_2)\, 5^n + c_3 \cdot 3^n$

נקבל רק 2 דרגות חופש (במקום 3). במקרה כזה צריך לנסות:

$$a_n = (c_1 + c_2 n) \cdot \ 5^n + c_3 \cdot 3^n$$

<u>תרגיל</u> : לבדוק שהסדרה הזאת מקיימת את נוסחת-הנסיגה לכל c_1, c_2, c_3.
איך מוצאים את c_1, c_2, c_3? בעזרת תנאי ההתחלה:

$$n = 0: \quad c_1 + c_2 + c_3 = 10 \quad (= a_0)$$
$$n = 1: \quad 5c_1 + 5c_2 + 3c_3 = -7 \quad (= a_1)$$
$$n = 2: \quad 25c_1 + 50c_2 + 9c_3 = 4 \quad (= a_2)$$

מקבלים מערכת משוואות לינאריות ב- c_3, c_2, c_1 עם פתרון יחיד.

<u>דוגמא</u> : $\begin{cases} a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 5^n \\ a_0 = 1, \qquad a_1 = 3 \end{cases}$

<u>פתרון</u> : פתרון פרטי + פתרון כללי הומוגני = פתרון כללי.

$$c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n + w \cdot 5^n$$

(w : מוצאים מהצבה בנוסחת נסיגה, c_1, c_2 : מוצאים ע"י תנאי ההתחלה)

<u>מציאת שרשי פולינום:</u>

א) מעלה 1 או 2 - נוסחה ידוע.
ב) מעלה 3 או 4 – יש נוסחאות (פחות ידעות).
ג) מעלה 5 ומעלה – באופן כללי לא קיימת נוסחה המביעה את השורשים באמצעות המקדמים ופעולות חיבור, חיסור, כפל, חילוק, העלאה בחזקה והוצאת שורשים (*Galois*)
מה אפשר לעשות?
1) מציאת שורשים (מרוכבים) <u>בקירוב</u> – בעזרת אלגוריתמים מתאימים (תוכנה).
2) מציאת שורשים <u>רציונליים</u> (בלי קירוב).

<u>נספח: מציאת שורשים רציונאליים של פולינום</u>

נניח שנתון פולינום עם מקדמים רציונאליים. בלי הגבלת הכלליות, אפשר להניח שהם שלמים:

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_k x^k \in \mathbf{Z}[x]$$

מטרתנו: למצוא את כל הערכים הרציונאליים $\mathbf{Q}$ $x = \frac{a}{b} \in$ כך ש- $p(x) = 0$.

<u>משפט</u> **:** נניח $p_0, p_k \neq 0$. אם $x = \frac{a}{b}$ הוא שורש של הפולינום $p(x)$, כאשר a,b שלמים, זרים ושונים מאפס, אז:

$a \mid p_0$ (a מחלק את p_0), $b \mid p_k$ (b מחלק את p_k).

<u>הוכחה</u> **:** נציב $x = \frac{a}{b}$ בשוויון $p(x) = 0$ ונכפיל ב- b^k:

$$p_0 b^k + p_1 a b^{k-1} + p_2 a^2 b^{k-2} + \dots + p_k a^k = 0$$

כל המחוברים, פרט אולי לראשון, מתחלקים ב- a. לכן גם $p_0 b^k$ מתחלק ב- a. מכיוון ש- b זר ל- a, בהכרח p_0 מתחלק ב- a.
באופן דומה: p_k מתחלק ב- b.
מש"ל.

<u>מסקנה</u> **:** כדי למצוא שורשים רציונאליים של $p(x)$ נעבור על כל המחלקים השלמים a של p_0 וכל המחלקים השלמים b של p_k (כולל סימן).

המספר $x = \frac{a}{b}$ הוא <u>מועמד</u> לשורש. נציב אותו ב- $p(x)$ ונבדוק אם הוא שורש.

<u>דוגמא</u> **:**

$$p(x) = \underbrace{2}_{p_0} - 3x - 3x^2 + \underbrace{2}_{p_3} x^3$$

כאן $p_0 = p_3 = 2$, ולכן המועמדים לשורשים של $p(x)$ מקיימים $a,b \in \{1,2,-1,-2\}$,

ז"א: $\frac{a}{b} \in \left\{\pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2}\right\}$. נבדוק: $\begin{matrix} p(1) = -2 \neq 0 \\ p(-1) = 0 \end{matrix}$.

מצאנו: $x = -1$ הוא שורש של $p(x)$. נחלק ונוריד את מעלת הפולינום:

$$p(x) = (x+1)(2x^2 - 5x + 2)$$

קיבלנו פולינום ריבועי $(2x^2 - 5x + 2)$ ששורשיו: $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$.

לכן: $p(x) = (x+1)(x-2)(2x-1)$

<u>דוגמא</u> : $p(x) = \underbrace{}_{p_3} x^3 + 2x^2 - x + \underbrace{6}_{p_0}$

כאן $p_3 = 1, p_0 = 6$ ולכן בהכרח $b = \pm 1$, ז"א: כל שורש רציונאלי של $p(x)$ הוא <u>שלם</u>.

שורשים רציונאליים אפשריים: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. מנסים ומוצאים:

$x = -3$ הוא שורש של $p(x)$ (ז"א: $p(-3) = 0$).

נחלק ונוריד את מעלת הפולינום:

$$p(x) = (x+3)(x^2 - x + 2)$$

קיבלנו פולינום ריבועי $(x^2 - x + 2)$ ששורשיו: $x = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}\, i}{2}$.

בדוגמה זו מצאנו את שלושת שרשי $p(x)$, למרות שלא כולם רציונאליים.

---סוף ההרצאה---