פונקציות יוצרות

טורי חזקות פורמליים :

הגדרה :
יהי F שדה כלשהו (אצלנו בדרך כלל: $F=Q,R,C$). טור חזקות פורמלי במשתנה x מעל F
הוא ביטוי מהצורה : $a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...$
כאשר המקדמים $a_0,a_1,a_2,...\in F$.

הערה : אין שום הגבלות נוספות על המקדמים. בפרט, לא נדרשת התכנסות.
למשל, $\sum_{n=1}^{\infty}n^nx^n$ הוא טור חזקות פורמלי.
אם המקדמים (פרט למספר סופי שלהם) הם אפסים, מקבלים פולינום: $a(x)=a_0+a_1x+...+a_kx^k$.

סימונים :
$F[[x]]=:$ אוסף טורי החזקות הפורמליים מעל F .
$F[x]=:$ אוסף הפולינומים מעל F .

פעולות בטורי חזקות פורמליים :

חיבור (מקדם-מקדם): $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)+\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right):=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$.

כפל בסקלר (שוב מקדם-מקדם): $(\alpha\in F)\quad \alpha\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right):=\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha\, a_n)x^n$.

קל לראות שעם פעולות אלו, $F[[x]]$ הוא מרחב וקטורי מעל F ו- $F[x]$ הוא תת-מרחב שלו.

כפל טורי חזקות : נגדיר $\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right):=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ כאשר $(\forall n\ge 0)\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$.

הערה : לכל $n\ge 0$, הסכום המגדיר את c_n הוא סכום מספר סופי של אברים בשדה F, ולכן מוגדר היטב.

הערה : ההגדרה הנ"ל הכרחית אם רוצים שתתקיימנה התכונות הבאות: $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$, x מתחלף עם איברי השדה F , ומתקיים ב-$F[[x]]$ חוק הפילוג.

דוגמה : $(1+x+3x^2)(1-2x)=(1+x+3x^2)\cdot 1+(1+x+3x^2)\cdot(-2x)=$
$=1+(x-2x)+(3x^2-2x^2)-6x^3=...$

דוגמה : $(1+x+x^2+x^3+...)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. כאן $(\forall n\ge 0)\quad a_n=b_n=1$, ולכן
$(\forall n\ge 0)\quad c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}=n+1$ (כל אחד מהמחוברים הוא 1). לכן

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)^2=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=1+2x+3x^2+\dots.$$

$F[[x]]$ הוא עכשיו חוג קומוטטיבי, עם יחידה (כפלית), בלי מחלקי אפס (ז"א: $a(x)\cdot b(x)=0 \iff a(x)=0$ או $b(x)=0$). זהו <u>תחום שלמות</u>.

<u>הגדרה</u> : טור פורמלי $a(x)\in F[[x]]$ נקרא <u>הפיך</u> אם קיים $b(x)\in F[[x]]$ כך ש- $a(x)\cdot b(x)=1\ (=1+0\cdot x+0\cdot x^2+\dots)$, ואז $b(x)$ נקרא <u>הטור ההפכי</u> ל- $a(x)$ ומסומן:

$$b(x)=a(x)^{-1}=\frac{1}{a(x)}.$$

<u>דוגמה</u> :

$$(1+x+x^2+\dots)(1-x)=(1+x+x^2+\dots)\cdot 1+(1+x+x^2+\dots)\cdot(-x)$$
$$=1+0\cdot x+0\cdot x^2+\dots=1$$

ולכן $(1+x+x^2+\dots)$ וגם $(1-x)$ הפיכים, $\mathbf{R}[[x]]\ni\dots+x^2+x+1=\frac{1}{1-x}$.

<u>טענה</u> : הטור הפורמלי $a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in F[[x]]$ הוא הפיך אם ורק אם $a_0\neq 0$.

<u>הוכחה</u> : עבור טור $b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\in F[[x]]$ נרשום במפורש את התנאי $a(x)\cdot b(x)=1$:

$$a_0b_0=1$$
$$a_0b_1+a_1b_0=0$$
$$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0$$
$$\dots$$

אצלנו: $a_n\in F$ נתונים, b_n נעלמים. זהוי מערכת משוואות לינאריות באינסוף משתנים.

אם $a_0=0$, ברור שאין פיתרון למשוואה הראשונה: $a_0b_0=0\neq 1$.

לכן, אם $a_0=0$, אז $a(x)$ לא הפיך.

אם $a_0\neq 0$ אפשר לפתור את המשוואה הראשונה ולמצוא את b_0 : $b_0=\frac{1}{a_0}$.

אפשר עכשיו להציב במשוואה השנייה ולמצוא את b_1 : $b_1=\frac{1}{a_0}(-a_1b_0)$ וכו'.

תמיד מקדם הנעלם הבא b_n הוא $a_0\neq 0$ כאשר כל הנעלמים הקודמים כבר קבלו ערך. לכן $a(x)$ הפיך. מש"ל.

אינטואיטיבית : אם למשל $a(x)=x$ אז $xb(x)\neq 1$ כי באגף שמאל מקדם $x^0=1$ מתאפס.

<u>הערה</u> : שדה המנות של $F[[x]]$ הוא $F((x))$, אוסף טורי *Laurent* פורמליים מהצורה : $a(x)=\sum_{n=-N}^{\infty}a_nx^n$. כאן מרשים מספר סופי של חזקות שליליות. למשל:

$$\frac{1}{x-x^2}=x^{-1}\cdot\frac{1}{1-x}=x^{-1}+1+x+x^2+x^3+\dots\in F((x))$$

$F((x))$ הוא <u>שדה</u>.

__הערה__ **:** שדה המנות של $F[x]$ (חוג הפולינומים) הוא $F(x)$, אוסף הפונקציות הרציונאליות מהצורה :

$a(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x),q(x)$ פולינומים, $q(x)\neq 0$).

$F(x)$ הוא שדה (מינימלי) המכיל את כל הפולינומים.

$F((x))$ הוא שדה (מינימלי) המכיל את כל טורי החזקות הפורמליים.

כמובן : $F(x)\subseteq F((x))$.

כל פונקציה רציונלית אפשר לכתוב כטור לורן.

__**פעולות נוספות :**__

__גזירה פורמלית__ **:** נגדיר:
$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right):=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

__אינטגרציה פורמלית__ **:** נגדיר:
$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)dx:=c+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$ (אינטגרל לא מסוים)

(את קבוע האינטגרציה c אפשר לבחור כשווה לאפס.)

לגבי אינטגרל מסוים יש בעיה, כי צריך __להציב__ (ראה להלן).

__דוגמא__ **:** ראינו:
$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots$$

נגזור לפי x :
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=1+2x+3x^2+\ldots=(1+x+x^2+\ldots)^2=\frac{1}{(1-x)^2}$$

חוקי הגזירה הרגילים (למשל $(f\cdot g)'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'$ וכו') מתקיימים.

__הצבה__ **:** אם $a(x),b(x)\in F[[x]]$ אז אפשר להציב: $a(b(x))\in F[[x]]$ __אם__ מתקיים אחד התנאים הבאים: א. $b_0=0$ ($a(x)$ כלשהו).

ב. b_0 כלשהו, $a(x)$ __פולינום__.

למשל: אם $a(x)$ אינו פולינום אז אפשר לדבר על: $a(x^2)$, $a(x+x^2+x^3+\ldots)$, אבל __לא__ על: $a(1)$, $a(1+2x)$, (כיוון שעלולה להיווצר בעיה של התכנסות).

__דוגמאות__ **:** אפשר להגדיר (פורמלית) :
$$e^x:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\in\mathbf{R}[[x]]$$

ולכן אפשר להגדיר e^{x+x^2} ($a(b(x))$ כאשר $b(x)=x+x^2, a(x)=e^x$) וכו',

אבל __אי-אפשר__ להגדיר e^{1+x} כי $b(x)=1+x$, __לא מקיים__ את התנאי $b(0)=0$.

אפשר גם להגדיר : $\ln(1+x):=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ldots\in\mathbf{R}[[x]]$

ומתקיים: $e^{\ln(1+x)}=1+x$

אפשר גם להגדיר, לכל $\alpha\in F$:
$$(1+x)^{\alpha}:=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\qquad(*)$$

כאשר __המקדם הבינומי המוכלל__ מוגדר עבור $\alpha\in F$ ע"י:

$$(n \geq 1) \qquad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}, \qquad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

הערה : אם $F = \mathbf{R}$ אז $(1+x)^{\alpha}$ היא פונקציה של x , והשוויון (*) הוא פיתוח טיילור של הפונקציה, והוא מתכנס בקטע $|x| < 1$. (אינפי)

למשל, מקבלים: $e^{\alpha \ln(1+x)} (1+x)^{\alpha}$

וגם: $(1+x)^{\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+x)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1+x$

נחשב במפורש את: $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^n$

עבור $n \geq 1$:

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(1/2)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)...\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} = \frac{1\cdot(-1)(-3)\cdot...\cdot(-2n+3)}{2^n\, n!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)}{2^n\, n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^n\, n!\, 2^{n-1}(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}}_{Catalan\ \ number}$$

אם נעשה אותו דבר לגבי: $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x)^n$

נקבל: $(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{2^{2n}}$

ולכן:

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n = 1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + ...$$

תרגיל : חשב: $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$ (ראה דף התרגיל לשיעור זה).

תרגיל : ע"י גזירה פורמלית של $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ מצא פיתוח עבור $\frac{1}{(1-x)^2}$, $\frac{1}{(1-x)^3}$ והשווה להגדרת $(1+x)^{\alpha}$ שלנו.

פונקציות יוצרות :

הגדרה : אם $a_0, a_1, a_2, ...$ היא סדרה של מספרים (שלמים, ממשיים וכו') אז הפונקציה היוצרת (הרגילה) שלהם היא טור החזקות הפורמלי : $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in R[[x]]$.

<u>הפונקציה היוצרת המעריכית</u> של הסדרה הנ"ל היא : $\tilde{a}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n \in R\left[\left[x\right]\right]$.

<u>דוגמא</u> : $a_n =$ מספר הקבוצות בגודל n בעלות תכונה מסוימת (למשל: מספר הצירופים בגודל n של כדורים כחולים במספר אי-זוגי).

$b_n =$ מספר הקבוצות בגודל n בעלות תכונה מסוימת <u>אחרת</u> (למשל: מספר הצירופים בגודל n של כדורים אדומים).

אזי:
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

הוא מספר הצירופים בגודל n של כדורים כחולים במספר אי-זוגי עם כדורים אדומים (במספר כלשהו).
הפונקציות היוצרות:

$$a(x)=0+1\cdot x+0\cdot x^2+1\cdot x^3+\ldots = x+x^3+x^5+\ldots$$
$$b(x)=1+x+x^2+x^3+\ldots$$
$$c(x)=a(x)\cdot b(x)=(x+x^3+x^5+\ldots)(1+x+x^2+x^3+\ldots)=$$
$$=\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x}=\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$$

<u>דוגמא</u> : מהו מספר הפתרונות של $x_1+x_2+\ldots+x_{100}=300$ כאשר $0\le x_i\le 9$ (ספרות)?

פונקציה יוצרת של <u>סיפרה אחת</u> : $a(x)=x^0+x^1+x^2+\ldots+x^9$

פונקציה יוצרת של סכום 100 הספרות: $a(x)^{100}=(1+x+x^2+\ldots+x^9)^{100}$

ומחפשים את מקדם x^{300} בפולינום זה.

מתי משתמשים בפונקציה יוצרת רגילה, ומתי במעריכית ?

<u>מצב א'</u> : סדרות מספרים (a_n), (b_n), (c_n) המקיימות:
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$
(אופייני ל<u>צירופים</u>).

נגדיר: $a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, $b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$, $c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$

ואז אלו פונקציות יוצרות רגילות כך ש-: $c(x)=a(x)\cdot b(x)$.

<u>מצב ב'</u> : סדרות מספרים (a_n), (b_n), (c_n) המקיימות:
$$c_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k b_{n-k}$$
(אופייני ל<u>תמורות</u>).

בכתיב אחר:
$$\frac{c_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\cdot\frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$$

נגדיר: $a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, $b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}x^n$, $c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n$

ואז אלו פונקציות יוצרות מעריכיות כך ש-: $c(x)=a(x)\cdot b(x)$.

<u>דוגמא</u> :
a_n = מספר הצירופים, עם חזרות, של n מתוך הספרות 2,1 כך שכל אחת מופיעה מספר <u>זוגי</u> של פעמים.
b_n = מספר הצירופים, עם חזרות, של n מתוך הספרות 4,3 כך שכל אחת מופיעה מספר <u>אי-זוגי</u> של פעמים.
c_n = מספר הצירופים עם חזרות של n מתוך הספרות 4,3,2,1 כך ש-2,1 מופיעות מספר <u>זוגי</u> של פעמים ואילו 4,3 מופיעות מספר <u>אי-זוגי</u> של פעמים.

כאן $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

צירוף = אין חשיבות לסדר. מקבלים שכדאי לקחת פונקציה יוצרת רגילה.

<u>דוגמא</u> :
a_n = מספר המספרים בני n ספרות שכולן 2,1. כל סיפרה מופיעה מספר <u>זוגי</u> של פעמים.
b_n = מספר המספרים בני n ספרות שכולן 4,3. כל סיפרה מופיעה מספר <u>אי-זוגי</u> של פעמים.
c_n = כנ"ל עם 4,3,2,1.
כאן <u>יש חשיבות</u> לסדר (תמורה עם חזרות).

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$$

<u>הפונקציות הבסיסיות</u> :

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$ (פונקציה יוצרת רגילה)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$$ (פונקציה יוצרת מעריכית)

<u>תרגיל</u> : $\left(1+x^2\right)\left(2-x\right)\left(1-3x\right) = \left(1+x^2\right)\left(2-7x+3x^2\right) = 2-7x$

איך לפתח פונקצית רציונלית לשברים חלקיים?
שלב ראשון: פירוק המכנה לגורמים לינאריים (מציאת שרשי פולינום).

אם $a(x)$ היא הפונקציה היוצרת הרגילה של $a_0, a_1, a_2, \ldots$ אז:
$\frac{1}{2}\left(a(x)+a(-x)\right)$ היא הפונקציה היוצרת הרגילה של $a_0, a_2, a_4, a_6, \ldots$.
$\frac{1}{2}\left(a(x)-a(-x)\right)$ היא הפונקציה היוצרת הרגילה של $a_1, a_3, a_5, \ldots$.

<u>דוגמה</u> : מה מספר הצירופים עם חזרות של n מתוך 4 סוגים כדורים, כאשר מסוג 1 בוחרים מספר זוגי של כדורים, מסוג 2 לכל היותר 10, מסוגים 4,3 לפחות 5, ובסה"כ מספר אי-זוגי?

<u>פתרון</u> : בשלב ראשון: $a\left(x\right) = \left(1+x^2+x^4+x^6+\ldots\right)\left(1+x+\ldots+x^{10}\right)\left(x^5+x^6+\ldots\right)^2 =$

$$=\left(1-x^2\right)^{-1}\left(1+x+\ldots+x^{10}\right)\left(x^5\left(1-x\right)^{-1}\right)^2=$$

$$=\left(1-x^2\right)^{-1}\ \frac{1-x^{11}}{1-x}x^{10}\left(1-x\right)^{-2}=\frac{x^{10}\left(1-x^{11}\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1-x\right)^3}$$

בשלב שני :
$$\frac{1}{2}\left[a\left(x\right)-a\left(-x\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x^{10}\left(1-x^{11}\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1-x\right)^3}-\frac{x^{10}\left(1+x^{11}\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1+x\right)^3}\right]$$

זו פונקציה רציונלית של x , ומחפשים את מקדם x .

---סוף ההרצאה---