בעית הקלפי, מספרי קטלאן ומספרי סטירלינג

בעית הקלפי :

שאלה : נניח שמתקיימות בחירות בין שני מתמודדים, ונניח שיש רק קלפי אחת (או שיש סדר בין המצביעים: ראשון, שני וכו'). נניח שמתמודד א' זכה ב- a קולות, ומתמודד ב' זכה ב- b קולות, כאשר $a > b$.
מה ההסתברות שמתמודד א' הוביל לכל אורך הבחירות?
דיון :
ניתן לתאר כל הצבעה אפשרית של n מצביעים (עם סדר: ראשון, שני וכו') בסדרה באורך n של "א", "ב".
למשל: אאבאבאבבא.
הדרישה היא שבכל רישא ($prefix$) של הסדרה יהיו יותר "א" מ-"ב". למשל, הסדרה הנ"ל לא מקיימת תנאי זה, כי היחס א:ב בכל הרישות (מימין לשמאל):

$$0:1,\ 0:2,\ 1:2,\ 1:3,\ 2:3,\ 2:4,\ 3:4,\ 4:4,\ 4:5.$$

(ב-8 המצביעים הראשונים יש תיקו 4:4)
נתאר עתה כמה מושגים בסיים בהסתברות הדרושים לנו: "מרחב ההסתברות" שלנו הוא אוסף כל סדרות ההצבעה האפשריות. זוהי קבוצה סופית X בגודל 2^n ($n=$ מספר המצביעים).
צריך להגדיר "מידת הסתברות" על המרחב. אצלנו יש הנחה נסתרת של התפלגות אחידה, ז"א:
כל אחת מ- 2^n הסדרות האפשריות היא בעלת אותה הסתברות מלכתחילה $\left(\frac{1}{2^n}\right)$. זו איננה הנחה הכרחית, כי בהינתן תוצאות הבחירות אפשר להניח שכל מצביע מעדיף את מתמודד א' על מתמודד ב'. בכל אופן נניח הנחה זו (כל מצביע נותן את קולו בהסתברות $\frac{1}{2}$ לכל אחד מהמתמודדים, והחלטות המצביעים בלתי תלויות זו בזו).
"מאורע" הוא תת-קבוצה S של X. למשל: המאורע של כל סדרות ההצבעה שבהן מתמודד א' הוביל כל הזמן.
ההסתברות של מאורע S (בהנחת התפלגות אחידה) היא: $P(S)=\frac{|S|}{2^n}$.
ההסתברות בדיעבד ($aposteriori$) של מאורע S_2 בהנחת מאורע S_1 היא:

$$P(S_2|S_1)=\frac{P(S_1\cap S_2)}{P(S_1)}$$

ברור שזהו מספר בין 0 ל-1 (מוגדר אם $P(S_1)\neq 0$). אצלנו:
$S_1 =$ המאורע שמתמודד א' קיבל a קולות ומתמודד ב' קיבל b קולות ($a+b=n$).
$S_2 =$ המאורע שמתמודד א' מוביל כל הזמן.
S_1 הוא הוסף הסדרות של a "אלפ"-ים ו-b "בית"-ים, ולכן:

$$P(S_1)=\frac{|S_1|}{2^n}=\frac{\binom{a+b}{a}}{2^n}\quad (n=a+b)$$

אנו רוצים לחשב את $P(S_1\cap S_2)=\frac{|S_1\cap S_2|}{2^n}$. נשתמש בהילוכי שריג:
נניח: "א" = צעד ימינה $(\rightarrow)$,"ב" = צעד למעלה $(\uparrow)$.

$S_1 =$ קבוצת הילוכי השריג $(0,0)\to(a,b)$.

$S_1\cap S_2 =$ קבוצת הילוכי השריג $(0,0)\to(a,b)$ הנמצאים ממש מתחת לישר $y=x$.

מהו גודל $S_1\cap S_2$? (מניחים $a>b$)

נחשב את $\left|S_1\setminus S_2\right|$, מספר הילוכים הלא רצויים $(0,0)\to(a,b)$.

<u>או</u> מתחיל בצעד למעלה, ואז מתקבל הילוך $(0,1)\to(a,b)$ שבודאי אינו רצוי. מספר האפשרויות:

$$\binom{a+b-1}{a}$$

<u>או</u> מתחיל בצעד ימינה, ואז בשלב מסוים הוא נוגע או חוצה את הישר $y=x$. במקרה זה, נשקף בישר $y=x$ את זנב ההילוך שאחרי נקודת הנגיעה הראשונה. נקודת הסיום גם היא עוברת שיקוף בישר $y=x$, ולכן מתקבל הילוך שריג $(1,0)\to(b,a)$.

הילוך כזה בודאי אינו רצוי, כי $(1,0)$ מתחת לישר ואילו (b,a) מעליו, וניתן לשחזר ממנו את הילוך המקורי ע"י שיקוף הפוך החל מנקודת הנגיעה הראשונה. קבלנו פונקציה חח"ע ועל:

$$f:\{(1,0)\to(a,b)\}\to\{(1,0)\to(b,a)\}$$

ולכן מספר האפשרויות במקרה זה הוא שוב: $\binom{a+b-1}{a}=\binom{a+b-1}{b-1}$

בסה"כ מקבלים: $\left|S_1\setminus S_2\right|=2\binom{a+b-1}{a}$

וקל לחשב: $P(S_2|S_1)=\dfrac{P(S_1\cap S_2)}{P(S_1)}=\dfrac{\left|S_1\cap S_2\right|}{\left|S_1\right|}=\dfrac{\binom{a+b}{a}-2\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}}=\dfrac{a-b}{a+b}$

<u>דוגמאות</u> :

אם $a=101$, $b=0$ אז $P(S_2|S_1)=\dfrac{101-0}{101+0}=1$ (לא מפתיע).

אם $a=51$, $b=50$ אז $P(S_2|S_1)=\dfrac{51-50}{51+50}=\dfrac{1}{101}\sim 0.01$ (די מפתיע – הסתברות לא קטנה שמתמודד שניצח על חודו של קול הוביל לכל אורך המרוץ!)

<u>מספרי קטלאן</u>

<u>הגדרה</u> **:** מספר $Catalan$ ה- n-י: $C_n:=\dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

<u>עובדות</u> **:** (קלות לחישוב)

(א) $C_n=\dfrac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n}$ הוא $\left|S_1\cap S_2\right|$ בבעית הקלפי עם $a=n+1$, $b=n$, ז"א: מספר הילוכי השריג $(0,0)\to(n+1,n)$ הנמצאים ממש מתחת לישר $y=x$.

(ב) $C_n=\binom{2n+1}{n}-2\binom{2n}{n-1}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$

הערה : בספר $R.$ *Stanley*, *enumerative Combinatorics*, *Vol.* 2 יש מעל 60 (ששים) אינטרפרטציות למספר קטלאן!

מספרי סטירלינג מסוג שני

הגדרה : $S(n,k)$ (מספר *Stirling* מסוג שני) הוא מספר הדרכים לחלק קבוצה בגודל n ל- k בלוקים זרים ולא ריקים (אין חשיבות לסדר הבלוקים ולסדר בכל בלוק).

דוגמא : $n=4,\ k=2$:

$$\{\{1,2,3\},\{4\}\}$$
$$\{\{1,2,4\},\{3\}\}$$
$$\{\{1,3,4\},\{2\}\}$$
$$\{\{2,3,4\},\{1\}\}$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$$
$$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$$
$$\{\{1,4\},\{2,3\}\} \qquad (S(4,2)=7)$$

הערה :

$S(0,0)=1$.

לכל $n>0$: $S(n,k)=0$ אם $k>n$ או $k=0$.

לכל $n>0$: $S(n,1)=S(n,n)=1$.

תרגיל : מספר הפונקציות $f:[n]\to[k]$ שהן על הוא $k!S(n,k)$.

מסקנה :
$$m^n=\sum_{k=1}^{n}(m)_k S(n,k) \quad (n>0)$$

מסקנה : (זהות בין פולינומים במשתנה x)
$$x^n=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k$$

הוכחה : ההפרש בין שני האגפים הוא פולינום ב- x ממעלה $\le n$, המתאפס עבור $x=1,2,3...$ ז"א: יש לו אינסוף (ובפרט, יותר מ- n) שרשים ממשיים. לכן זהו פולינום האפס. מש"ל.

דוגמא : $S(3,1)=S(3,3)=1,\ S(3,2)=3$
$$S(3,1)(x)_1+S(3,2)(x)_2+S(3,3)(x)_3=x+3x(x-1)+x(x-1)(x-2)=x^3$$

---סוף ההרצאה---