מקדמים מולטינומיים, הילוכי שריג ומקדמים q- בינומיים

<u>הגדרה</u> : אם $n_1, n_2, ..., n_k$ הם מספרים שלמים אי-שליליים המקימים $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$, נסמן:

$$\binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! ... n_k!}$$

זהו <u>מקדם מולטינומי</u>.

<u>תזכורת</u> : זהו בדיוק מספר התמורות עם חזרות של n עצמים מיתוך k "סוגים", כאשר לוקחים בדיוק n_1 עצמים מסוג 1, n_2 עצמים מסוג 2, וכו'

<u>דוגמה</u> :

$$\binom{7}{2\,2\,0\,3} = \frac{7!}{2!\,2!\,0!\,3!}$$

זהו מספר החליפות של 7 עצמים מתוך 4 סוגים:
2 עצמים מסוג 1, 2 עצמים מסוג 2, 0 עצמים מסוג 3, 3 עצמים מסוג 4.

<u>תזכורת</u> : המקרה הפרטי $k = 2$ הוא בדיוק מקדם בינומי: $(n = n_1 + n_2)$ $\binom{n}{n_1 n_2} = \frac{n!}{n_1! n_2!}$

כמקדם בינומי, מסמנים זאת בקיצור $\binom{n}{n_1}$ או $\binom{n}{n_2}$.

<u>משפט</u> : (נוסחת המולטינום)

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{\substack{n_1, n_2, ..., n_k \ge 0 \\ n_1 + n_2 + ... + n_k = n}} \binom{n}{n_1 n_2 ... n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_k^{n_k}$$

<u>הוכחה</u> : כמו עבור נוסחת הבינום.

<u>דוגמה</u> :

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \ge 0 \\ n_1 + n_2 + n_3 = 2}} \binom{2}{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$\binom{2}{2\;0\;0} = \frac{2!}{2!\,0!\,0!} = 1 \qquad \binom{2}{1\;1\;0} = \frac{2!}{1!\,1!\,0!} = 2$$

<u>הערה</u> : מדוע מגדירים 0!=1 ?
<u>תשובה</u> : כדי לקיים את התכונה: $(n+1)! = n!(n+1)$ גם עבור $n = 0$: $1! = 0! \cdot 1 = 0!$.
<u>הערה</u> : קיימת פונקציה $w = \Gamma(z)$ (פונקציה מרוכבת של משתנה מרוכב), המקיימת:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad (n = 1,2,3,...)$$

הפונקציה היא <u>אנליטית</u> (ז"א גזירה) בכל המישור המרוכב, פרט לקטבים בנקודות $z = 0, -1, -2, ...$.
תכונות המקדמים המולטינומיים <u>דומות</u> לאלו המקדמים הבינומיים. <u>למשל</u>:

<u>סימטריה</u> :

$$\binom{5}{2\;1\;2} = \binom{5}{2\;2\;1} = \binom{5}{1\;2\;2}$$

<u>נוסחת נסיגה</u> : (למשל $k=3$) עבור $n_1,n_2,n_3\ge 1$:

$$\binom{n}{n_1\ \ n_2\ \ n_3}=\binom{n-1}{n_1-1\ \ n_2\ \ n_3}+\binom{n-1}{n_1\ \ n_2-1\ \ n_3}+\binom{n-1}{n_1\ \ n_2\ \ n_3-1}$$

<u>הילוכי שריג</u> :

<u>השריג</u> (*lattice*) אצלנו הוא $\mathbf{Z}^2$, קבוצת הנקודות במישור עם שתי קואורדינטות שלמות.
<u>הילוך שריג</u> הוא סדרת צעדים בין נקודות שריג, כאשר כל צעד הוא <u>או</u> 1 ימינה, <u>או</u> 1 למעלה.
<u>דוגמא</u> : הילוך שריג $(0,0)\to(4,3)$.
<u>שאלה</u> : עבור $m,n\ge 0$ שלמים, מהו מספר הילוכי השריג $(0,0)\to(m,n)$?
<u>פתרון</u> : נשים לב שבכל הילוך כזה יש בדיוק $m+n$ צעדים, מהם m ימינה ו- n למעלה. למשל, ההילוך בדוגמא ניתן לתיאור ע"י סדרת של $7=4+3$ חצים: $\to\uparrow\uparrow\to\uparrow\to\to$
עלינו לבחור אילו m מתוך $m+n$ הצעדים יהיו ימינה (וממילא היתר יהיו למעלה). מספר האפשרויות הוא המקדם הבינומי $\binom{m+n}{m}$.

אם נרשום בכל נקודת שריג $m+n$ $m,n\ge 0$ את מספר הילוכי השריג $(0,0)\to(m,n)$ נקבל "משולש פסקל מסובב".

4	1	5	15	35	70
3	1	4	10	20	35
2	1	3	6	10	15
1	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	1
	0	1	2	3	4

למשל: $\binom{3+2}{3\ \ 2}=10$

התכונה $\binom{m+n-1}{m}+\binom{m+n-1}{m-1}=\binom{m+n}{m}$ $(m,n\ge 1)$

פירושה: בכל הילוך $(0,0)\to(m,n)$ מגיעים, בצעד הלפני אחרון, <u>או</u> ל-($m-1,n$) <u>או</u> ל-($m,n-1$).

<u>מקדמים q- בינומיים</u> :

נסמן ב- $c_t=c_t(k,l)$ את מספר הילוכי השריג $(0,0)\to(k,l)$ שיש מתחתם בדיוק t משבצות ($0\le t\le k\cdot l$). נסמן גם: $\begin{bmatrix}k+l\\ k\ \ l\end{bmatrix}_q:=\sum_{t=0}^{kl}c_t(k,l)q^t$ כאשר q משתנה פורמלי.

$\begin{bmatrix}k+l\\ k\ \ l\end{bmatrix}_q$, או בקיצור $\begin{bmatrix}k+l\\ k\end{bmatrix}_q$, נקרא מקדם <u>$q$–בינומי</u> (או: מספר *Gauss*).

<u>דוגמאות</u> :

(א) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$

(ב) $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 3 \\ 1\ 2 \end{bmatrix}_q = \sum_{t=0}^{2} c_t(1,2)q^t = 1 + q + q^2$

(ג) $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 4 \\ 2\ 2 \end{bmatrix}_q = 1\cdot 1 + 1\cdot q + 2q^2 + 1\cdot q^3 + 1\cdot q^4$

כמובן, עבור $q = 1$ נקבל: $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}_1 = 1 + 1 + 2\cdot 1 + 1 + 1 = 6 = \binom{4}{2}$

באופן כללי, $\begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}_q$ הוא פולינום ב- q, ממעלה $k \cdot l$, עם מקדמים שלמים וחיוביים.

<u>משפט</u> : $\begin{bmatrix} k+l \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{[k+l]_q!}{[k]_q![l]_q!}$

כאשר $(k \geq 0)$ $\quad [k]_q := \dfrac{1-q^k}{1-q} = 1 + q + \dots + q^{k-1}$

$[0]_q! = 1 \qquad [k]_q! := [1]_q \cdot [2]_q \cdot \dots \cdot [k]_q$

<u>דוגמאות</u> :

(א) $[2]_q = \dfrac{1-q^2}{1-q} = 1 + q$

(ב) $[4]_q = \dfrac{1-q^4}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3$

(ג)
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2\ 2 \end{bmatrix}_q = \frac{[4]_q!}{[2]_q![2]_q!} = \frac{[1]_q \cdot [2]_q \cdot [3]_q \cdot [4]_q}{[1]_q \cdot [2]_q \cdot [1]_q \cdot [2]_q} = \frac{[3]_q \cdot [4]_q}{[1]_q \cdot [2]_q} =$$
$$= \frac{(1+q+q^2)(1+q+q^2+q^3)}{1\cdot(1+q)} = (1+q+q^2)(1+q^2) = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4$$

<u>תרגיל</u> : חשב את $\begin{bmatrix} 7 \\ 4\ 3 \end{bmatrix}_q$ ובפרט את $c_5(4,3)$.

עבור $q = 1$ מקבלים את הנוסחה הידועה $\binom{k+l}{k} = \dfrac{(k+l)!}{k!l!}$.

כידוע, המקדמים הבינומיים קיבלו שם זה בגלל <u>נוסחת הבינום</u>: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

האם יש "נוסחת q-בינום"?

<u>משפט</u> :
$$(x+y)(qx+y)\cdot\ldots\cdot(q^{n-1}x+y) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k y^{n-k}$$

<u>הוכחה</u> : המכפלה באגף שמאל, אחרי שימוש בחוק הפילוג, היא סכום ביטויים מהצורה:
$$q^j x^k y^{n-k} \quad (0 \le k \le n,\ \ j \ge 0)$$

ניקח $0 \le k \le n$ קבוע, ונראה שסכום המחוברים הנ"ל עם ערך זה של k הוא: $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

כדי לקבל מחובר כזה, יש לבחור k מתוך n הגורמים $x+y, qx+y, \ldots, q^{n-1}x+y$
מגורמים אלו ניקח x (עם חזקת q) מתאימה, ומ- ($n-k$) הגורמים האחרים ניקח y.
נניח שבחרנו x מהגורמים:
$q^{i_1-1}x+y, \ldots, q^{i_k-1}x+y$ כאשר $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$.
נתאים לבחירה זאת הילוך שריג $(0,0) \to (k, n-k)$ ע"י:
צעדים $i_1, i_2, \ldots, i_k$ הם ימינה, השאר-למעלה.

$$\underbrace{\uparrow\ldots\uparrow\underset{i_1}{\rightarrow}\uparrow\ldots\uparrow\underset{i_2}{\rightarrow}\ldots\uparrow\ldots\uparrow\underset{i_k}{\rightarrow}\uparrow\ldots\uparrow}_{n\ \text{צעדים}}$$

מספר המשבצות מתחת להילוך שריג זה הוא:
$$(i_1-1)+(i_2-2)+\ldots+(i_k-k) = \sum_{j=1}^{k}(i_j-1) - \sum_{j=1}^{k}(j-1)$$

נשים לב: $\sum_{j=1}^{k}(i_j-1)$ הוא סכום חזקות q המתלוות ל-x-ים שנבחר!

אם נסכם על כל הבחירות האפשריות של $i_1 < \ldots < i_k$ (עבור k נתון), נקבל שמקדם $x^k y^{n-k}$

בנוסחתנו הוא: $$q^{\sum_{j=1}^{k}(j-1)} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

כנדרש. מש"ל.

<u>דוגמה למשפט</u> : ($n=3$)

$$\begin{aligned}(x+y)(qx+y)(q^2x+y) &= (x+y)(q^3x^2+qxy+yq^2x+y^2) \\ &= (q^3x^3+qx^2y+yq^2x^2+xy^2+q^3x^2y+qxy^2+y^2q^2x+y^3) \\ &= q^3x^3+(q+q^2+q^3)x^2y+(1+q+q^2)xy^2+y^3 \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}_q q^{\binom{3}{2}}x^3 + \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}_q q^{\binom{2}{2}}x^2y + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_q q^{\binom{1}{2}}xy^2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}_q q^{\binom{0}{2}}y^3\end{aligned}$$

$$\left(\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}_q=\frac{[3]_q!}{[2]_q![1]_q!}=\frac{[3]_q}{[1]_q}=\frac{1+q+q^2}{1}\right)$$

<u>משפט</u> : (גרסה אחרת של נוסחת ה-q-בינום)
אם y, x הם אברים בחוג לא-קומוטטיבי המקיימים: $\underline{y\cdot x=qx\cdot y}$

(כאשר q מתחלף עם x ועם y), אז: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q x^k y^{n-k}$

(כאן לא נוספות חזקות q!)
<u>הוכחה</u> : אגף שמאל הוא סכום של מכפלות של n גורמים, כולם x או y. נרצה להעבירן לצורה $x^k y^{n-k}$. למשל: $xy\underbrace{yx}y=qx\underbrace{yx}yy=q^2xxyyy=q^2x^2y^3$

אם במכפלה מופיע x במקומות $1\le i_1<\ldots<i_k\le n$, אז כדי להעבירו למקומות $1<\ldots<k$ צריך: ה-x הראשון (במקום i_1) "להתחלף" עם i_1-1 y-ים, ה-x השני (במקום i_2) "להתחלף" עם i_1-2 y-ים, וכו'. בסה"כ מספר ההתחלפויות (שכל אחת תורמת מקדם q) הוא $\sum_{j=1}^{k}(i_j-1)$, והנימוק בהוכחה הקודמת (הילוכי שריג) נותן מש"ל.

פרשנות נוספת של המקדמים ה-q-בינומיים קשורה <u>לשדות סופיים</u>. יהי $\mathbf{F}_q$ שדה סופי בעל q אברים.
כאן q אינו פרמטר מופשט, אלא מספר טבעי (ליתר דיוק: חזקה של ראשוני).
יהי $\mathbf{V}$ מרחב וקטורי n-ממדי מעל $\mathbf{F}_q$.

<u>משפט</u> : מספר התת-מרחבים ה-k-ממדיים של $\mathbf{V}$ הוא $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$ (לכל $0\le k\le n$).

<u>הוכחה</u> : ראה דף התרגיל לשיעור זה.

---סוף ההרצאה---