מקדמים בינומיים

תזכורת : $(0 \le k \le n)$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

זהו מספר הצירופים בלי חזרות של k מתוך n. מספרים אלו נקראים מקדמים בינומיים, בגלל הופעתם במשפט הבינום.

משפט (משפט הבינום) : לכל $n \ge 0$ שלם:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \binom{n}{0} y^n + \binom{n}{1} xy^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n} x^n$$

הוכחה (קומבינטורית): $\quad (x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n\ times}$

כשנפתח סוגריים נקבל סכום של מכפלות. כל מכפלה מכילה n גורמים, שכל אחד מהם הוא x או y.

לכן המכפלות האפשריות : $(0 \le k \le n)$ $\quad x^k y^{n-k}$.

נותר לבדוק שמקדם $x^k y^{n-k}$ בפיתוח הוא באמת $\binom{n}{k}$. ואמנם: כדי לקבל $x^k y^{n-k}$ צריך לבחור, מתוך n הגורמים $(x+y)$ במכפלה, k גורמים שיתנו x (ושאר הגורמים יתנו y). זוהי בחירה של k מתוך n המספרים $\{1,2,\ldots,n\}$, בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר (צירופים בלי חזרות). מספר האפשרויות הוא $\binom{n}{k}$.

מש"ל.

תכונות :

(א) $\binom{n}{k}$ הם מספרים שלמים חיוביים (=טבעיים) (עבור $0 \le k \le n$).

(ב) סימטריה : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

הוכחה (א) : הצבה בנוסחה המפורשת: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

הוכחה (ב) : (קומבינטורית)

בחירה של k מתוך n (נאמר מתוך הקבוצה $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$) שקולה לבחירת כל האחרים (שלא נבחרו).

בניסוח אחר (פורמלי):

$\binom{n}{k}$ הוא גודל הקבוצה $S_{k,n} := \{ A \subseteq [n] \mid |A| = k \}$.

<u>למשל</u>: $S_{2,3}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$, $|S_{2,3}|=\binom{3}{2}$.

$\binom{n}{n-k}$ הוא גודל הקבוצה $S_{n-k,n}$. השוויון $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ שקול לקיום פונקציה חח"ע ועל:

$$\varphi : S_{k,n} \to S_{n-k,n}$$

פונקציה פשוטה כזאת היא: $(\forall A \in S_{k,n})$ $\varphi(A):=[n]\setminus A$ (<u>המשלים</u> של A בתוך $[n]$).

(ג) ניקח לדוגמא $n=4$: $\binom{4}{0}=1$ $\binom{4}{1}=4$ $\binom{4}{2}=6$ $\binom{4}{3}=4$ $\binom{4}{4}=1$

סדרת המספרים $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\dots,\binom{n}{n}$ היא <u>אונימודלית</u> (unimodal), ז"א: הסדרה עולה בהתחלה, ואחר-כך יורדת.

בגלל הסימטריה, הסדרה עולה עד האמצע ($k \sim \frac{n}{2}$) ואחר-כך יורדת.

בניסוח מדויק: $\binom{n}{k-1}<\binom{n}{k}$ $\left(1\le k\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$.

<u>הוכחה</u>:

באמצעות הנוסחה המפורשת: $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\dfrac{n!\cdot(k-1)!\cdot(n-k+1)!}{k!\cdot(n-k)!\cdot n!}=\dfrac{n-k+1}{k}>1$

(כי: $n-k+1>k \;\Leftarrow\; k<\frac{n+1}{2} \;\Leftarrow\; k\le\frac{n}{2}$).

מש"ל.

(<u>אתגר</u>: למצוא הוכחה קומבינטורית!)

<u>מסקנה</u>: עבור n קבוע, המקדם הבינומי הגדול ביותר $\binom{n}{k}$ מתקבל עבור $k=\frac{n}{2}$ (אם n זוגי),

או $k=\frac{n-1}{2}$, $k=\frac{n+1}{2}$ (אם n אי-זוגי).

(ד) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ $(1\le k\le n-1)$.

<u>הוכחה (א)</u>: באמצעות הנוסחה המפורשת (תרגיל).

<u>הוכחה (ב)</u>: (קומבינטורית) נסמן:

$\binom{n}{k}=$ מספר תת-הקבוצות בגודל k של $[n]$.

נבחין בין תת-קבוצות המכילות את המספר n לבין כאלו שאינן מכילות את n.

$\binom{n-1}{k-1}=$ מספר תת-הקבוצות בגודל k של $[n]$ המכילות "n" (צריך לבחור $k-1$ מתוך $[n-1]$).

$\binom{n-1}{k}=$ מספר תת-הקבוצות בגודל k של $[n]$ <u>שאינן</u> מכילות "n" (צריך לבחור k מתוך $[n-1]$).

מחברים ומקבלים מש"ל.

(ה) נוסחה (ד) היא <u>נוסחת נסיגה</u>, המאפשרת לחשב מקדם בינומי $\binom{n}{k}$ באמצעות מקדמים עם פרמטרים k,n קטנים יותר.

ערכים התחלתיים : $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$ $(\forall n\geq 0)$.

מקבלים את <u>משולש פסקל</u> **:**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\ 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\ & & & & & & \vdots & & & & & & \end{array}$$

נראה כמה זהויות לגבי סכומים של מקדמים בינומיים:

(ו) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$ $(n\geq 0)$**.**

<u>הוכחה (א)</u> **:** (קומבינטורית)

$\binom{n}{k}=$ מספר תת-הקבוצות בגודל k של הקבוצה $[n]$.

הסכום = מספר תת-הקבוצות (בלי הגבלת גודל) של הקבוצה $[n]$. ראינו כבר שמספר זה הוא 2^n.

<u>הוכחה (ב)</u> : בנוסחת הבינום $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ נציב: $x=y=1$ ונקבל: $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

(ז) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^n\binom{n}{n}=0$ $(n\geq 1)$ (אם $n=0$ אז הסכום הוא 1).

<u>הוכחה</u> : נציב בנוסחת הבינום $x=-1$, $y=1$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (-1+1)^n = 0$ $(n\geq 1)$.

(ח) $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...=2^{n-1}$ $(n\geq 1)$.

<u>הוכחה</u> : נחבר את שני השוויונות הקודמים, $0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$ ו- $2^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$:

$$1+(-1)^k\begin{cases}2, & \text{אם } k \text{ זוגי}\\ 0, & \text{אם } k \text{ אי-זוגי}\end{cases}$$

ולכן החיבור נותן: $2^n=\sum_{k\ \text{זוגי}}\binom{n}{k}\cdot 2$, $2^{n-1}=\sum_{k\ \text{זוגי}}\binom{n}{k}$.

(ט) $\binom{n}{0}+\binom{n}{4}+\binom{n}{8}+\binom{n}{12}+...=?$.

<u>פתרון</u> : נשתמש בנוסחת הבינום (עם $y=1$): $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x)^k$.

נציב $-x$ במקום x : $(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k$, נחבר ונחלק ב-2:

$$\tfrac{1}{2}\left[(1+x)^n+(1-x)^n\right]=\sum_{k\ \text{זוגי}}\binom{n}{k}x^k=\sum_{m}\binom{n}{2m}x^{2m}$$

סילקנו כבר את כל המקדמים עם k אי-זוגי. עתה צריך לסלק את הזוגיים שאינם מתחלקים ב-4.
נציב עכשיו ix במקום x :

$$\tfrac{1}{2}\left[(1+ix)^n+(1-ix)^n\right]=\sum_{m}\binom{n}{2m}(ix)^{2m}=\sum_{m}\binom{n}{2m}(-1)^m x^{2m}$$

עכשיו נחבר לנוסחה הקודמת ונחלק שוב ב-2 :

$$\tfrac{1}{4}\left[(1+x)^n+(1-x)^n+(1+ix)^n+(1-ix)^n\right]=\sum_{4|k}\binom{n}{k}x^k$$

($4|k$: 4 מחלק את k)

ניקח עכשיו $x=1$ ונקבל:

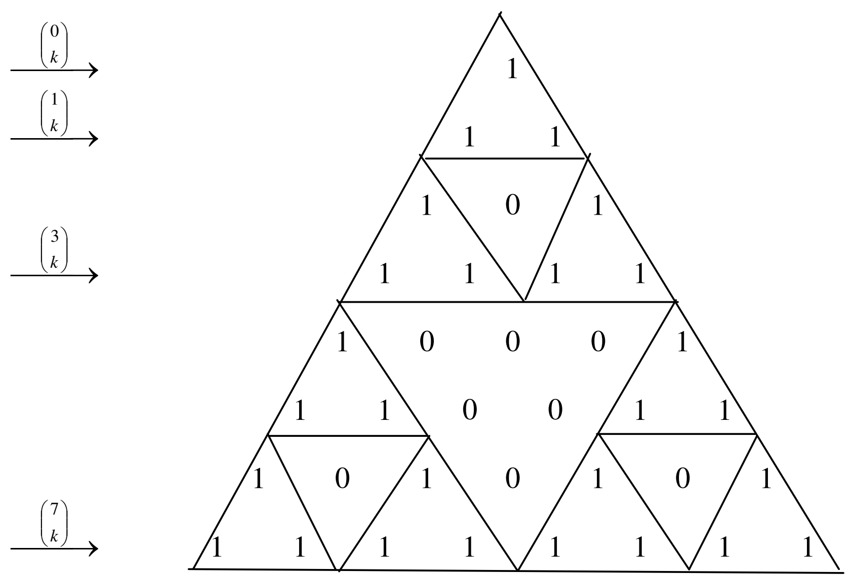
$$\sum_{4|k}\binom{n}{k}=\tfrac14\left[(1+1)^n+(1-1)^n+(1+i)^n+(1-i)^n\right]=\tfrac14\left[2^n+2^{n/2}cis(\pi n/4)+2^{n/2}cis(-\pi n/4)\right]$$

$$=\frac14\cdot 2^n+\frac12\cdot 2^{n/2}\cos(\pi n/4)\qquad (n\ge 1)$$

$$=\begin{cases} 1 & n=0\\ 2^{4k-2}+(-1)^k 2^{2k-1} & n=4k>0\\ 2^{4k-1}+(-1)^k 2^{2k-1} & n=4k+1\\ 2^{4k} & n=4k+2\\ 2^{4k+1}-(-1)^k 2^{2k} & n=4k+3\end{cases}$$

נשים לב שבקירוב טוב התשובה היא $\frac14\cdot 2^n$, התיקון הוא מסדר גודל $O(2^{n/2})$ בלבד.

(י) נתבונן במשולש פסקל ב- $(\mathrm{mod}\,2)$:



רואים תבניות מובהקות דמויות-פרקטלים! מדוע?

<u>משפט</u> (Lucas) **:**

$\binom{n}{k}$ הוא אי-זוגי אם ורק אם בחיבור " k ועוד $n-k$ " בבסיס 2 אין <u>נשא</u> (Carry).

באופן כללי, חזקת 2 המחלקת את $\binom{n}{k}$ היא מספר העמודות עם נשא.

<u>דוגמאות</u> :

(א)

$$\begin{array}{rrrl} & 0 & 1 & 1 \quad (k=3) \\ + & & & \\ & 0 & 1 & 0 \quad (n-k=2) \\ \hline & 1 & 0 & 1 \quad (n=5) \end{array}$$

<u>יש</u> נשא (בעמודה השניה) ולכן $\binom{5}{3}=10$ <u>זוגי</u>.

(ב)

$$\begin{array}{rrrl} & 0 & 0 & 1 \quad (k=1) \\ + & & & \\ & 1 & 0 & 0 \quad (n-k=4) \\ \hline & 1 & 0 & 1 \quad (n=5) \end{array}$$

<u>אין</u> נשא ולכן $\binom{5}{1}=5$ <u>אי- זוגי</u>.

<u>מסקנה</u> : אם $n=2^t-1=111...11_2$ (t טבעי) אז $\binom{n}{k}$ תמיד אי-זוגי, כי כל חיבור $k+(n-k)=n$ הוא של "מספרים משלימים" (אין נשא).

<u>דוגמא</u> :

$$\begin{array}{rrrrl} & 0 & 1 & 1 & 0 \quad (k=6) \\ + & & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 \quad (n-k=9) \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 \quad (n=15) \end{array}$$

<u>תרגיל</u> : אם $n=2^t$ אז $\binom{n}{k}$ תמיד זוגי, חוץ מאשר $1=\binom{n}{n}=\binom{n}{0}$.

<u>הוכחה</u> (של המשפט) : $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

ראינו בתרגיל שחזקת 2 המחלקת את $n!$ היא: $\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$ (הסכום בעצם סופי).

כנ"ל לגבי $k!$ ו- $(n-k)!$. לכן, חזקת 2 המחלקת את $\binom{n}{k}$ היא:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\underbrace{\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{k}{2^i} \right\rfloor-\left\lfloor \frac{n-k}{2^i} \right\rfloor}_{(*)}\right)$$

$\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$ =: המספר המתקבל מכתיבת n לפי בסיס 2 וזריקת i הספרות הימניות.

(למשל $27 = 110|11_2$ ואמנם: $\left\lfloor \frac{27}{2^2} \right\rfloor = 6 = 110_2$).

הביטוי $(*)$ שווה ל-"0" אם אין נשא מעמודה i לעמודה $i+1$ בחיבור $n = (n-k) + k$ בבסיס 2, ושווה ל-"1" אם יש נשא.

המקדם $\binom{n}{k}$ אי-זוגי $\Leftrightarrow$ כל ה-$(*)$ הם אפסים, ז"א: אין בכלל נשא בחיבור $n = (n-k) + k$.

מש"ל.

<u>הערה</u> **:** לפי הגדרה, אם $n < k$ $(n \geq 0)$ אז: $\binom{n}{k} = 0$.

<u>הערה</u> **:** נהוג לעיתים להגדיר $\binom{x}{k}$ עבור x כלשהו (שלם, ממשי, מרוכב) $k \geq 0$ שלם ע"י:

$$\binom{x}{0} := 1 \ ,\ \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

אם $0 \leq k \leq n$ שלמים , מקבלים את ההגדרה המוכרת של $\binom{n}{k}$.

אם $0 \leq n < k$ שלמים, מקבלים: $0 = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \binom{n}{k}$, כי אחד הגורמים הוא $n - n = 0$.

אם $n < 0$ שלם מקבלים $(n = -m)$:

$$\binom{-m}{k} = \frac{(-m)(-m-1)\cdot\ldots\cdot(-m-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = (-1)^k \binom{m+k-1}{k}$$

---סוף ההרצאה---