תמורות וצירופים

בעית מנייה בסיסית :
בכמה דרכים אפשר לבחור k כדורים מתוך שק של n כדורים?
השאלה אינה מוגדרת היטב. צריך להתייחס לשני היבטים (לפחות):
(א) האם הכדורים שונים זה מזה או לא?
לחילופין: האם אפשר לבחור אותו כדור יותר מפעם אחת? (בלי או עם חזרות).
(ב)האם "בחירה" היא קבוצה (לא סדורה) או סדרה? (בלי או עם חשיבות לסדר).
(ז"א: (א) האם מותרות חזרות? (ב) האם יש חשיבות לסדר הבחירה?)

נגדיר:
תמורות : בחירות עם חשיבות לסדר הבחירה.
צירופים : בחירות בלי חשיבות לסדר הבחירה.
דוגמא : בחירת 2 כדורים מתוך שלושה {א,ב,ג}:

	בלי חזרות	**עם חזרות**
תמורות	$3 \cdot 2 = 6$	$3^2 = 9$
צירופים	3	6

ישנן, אם כן, 4 פירושים אפשריים לבעיית המניה :

(1) תמורות עם חזרות :
מספר ניסוחים שקולים:
(א) בוחרים כדור ראשון (מתוך n), ומחזירים אותו. בוחרים כדור שני, ומחזירים אותו וכו'.
(ב) לחילופין: יש n שקים, בכל שק מספר בלתי-מוגבל של כדורים זהים. בוחרים כדור ראשון מאחד השקים. אח"כ בוחרים כדור שני מאחד השקים וכו'. מספר האפשרויות בכל שלב הוא n. לכן, אם יש k שלבים (בחירת k מתוך n עם חזרות, עם חשיבות לסדר), מספר הדרכים הוא: $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{\text{k גורמים}} = n^k$.

(ג) ניסוח שקול שלישי לבעיה:
(נסמן את n הכדורים \ השקים במספרים: $1,2,3,\ldots,n$)
שאלה : מהו מספר הסדרות באורך k $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ של מספרים מתוך הקבוצה $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$?
תשובה : n^k.

(2) תמורות בלי חזרות :
כאן כל כדור נבחר לכל היותר פעם אחת.
ניסוח אחר: מהו מספר הסדרות באורך k של מספרים שונים מתוך הקבוצה $[n]$?
לבחירת הראשון יש n אפשרויות. לבחירת השני נשארו רק $n-1$ אפשרות וכו'. לבחירת מספר k יש רק $n-k+1$ אפשרויות.
מספר האפשרויות הכללי : $(n)_k := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ (כאן בהכרח $1 \le k \le n$).
(למעשה אפשר לקחת גם $k=0$, ואז מגדירים $(n)_0 := 1$).
אם $k = n$ מקבלים : $(n)_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$.
וזה מסומן בדרך כלל: $n!$ (n עצרת, n *factorial*).
אם $k > n$ אז $n-k+1 \le 0$, הנוסחה עדיין נכונה ונותנת :

$$(n)_k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 0\ldots\cdot(n-k+1) = 0$$

סימונים ישנים ל- $(n)_k$: A_n^k , P_n^k .
נחזור למקרה $k=n$:
בחירת n מתוך n ללא חזרות, עם חשיבות לסדר היא בעצם סידור כל אברי $[n]$ בסדרה. זוהי <u>תמורה</u> באורך n.
באופן יותר כללי :
<u>תמורה</u> על קבוצה A היא פונקציה $\pi : A \to A$ שהיא חח"ע ועל.
אם A קבוצה סופית אז π חח"ע $\Leftrightarrow$ π על.
בעצם, קבוצה סופית בגודל $n \ge 0$ היא שוות-גודל ל-$[n]$ (מגדירים: $[0]:=\emptyset$), ותמורה על A היא "בעצם" תמורה על $[n]$. נסכים כאן לקרוא "תמורות" ל "בחירות עם חשיבות לסדר" גם אם $k<n$.
<u>הערה</u> **:** אם $0 \le k \le n$ אז: $(n)_k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$**.**
(מסכימים להגדיר **:** $0!:=1$).

(3) <u>צירופים בלי חזרות</u> :
תיאורים שקולים של צירופים בלי חזרות של k מתוך n:
(א) תמורה (בחירה עם חשיבות לסדר) של k מתוך n כש"שוכחים" את הסדר.
(ב) בחירת <u>תת-קבוצה</u> בגודל k מקבוצה בגודל n.
מה מספר האפשרויות?
לפי התיאור הראשון, יש $(n)_k$ סדרות באורך k של איברים שונים מתוך $[n]$.
כל $k!$ סדרות נותנות אותה תת-קבוצה (כששוכחים את הסדר).

<u>דוגמא</u> **:**
<u>קבוצה</u> : $\{1,2,3\}$, <u>סדרות</u> : $(1,2,4),(1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1)$ ($3!=6$ סדרות).
(יש $k!$ דרכים לסדר קבוצה בגודל k.)
נסכם: מכל קבוצה מקבלים $k!$ סדרות. מספר הסדרות הכללי הוא $(n)_k$.
לכן: מספר <u>הקבוצות</u> הכללי הוא **:** $\binom{n}{k} := \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
שוב, זה נכון עבור $0 \le k \le n$.
(אם $k>n$, <u>מספר אפשרויות</u> הוא 0.)
סימון ישן ל- $\binom{n}{k}$: C_n^k.

(4) <u>צירופים עם חזרות</u> :
בוחרים סדרה באורך k מתוך $[n]$, עם חזרות (תמורה עם חזרות), ו"שוכחים" את הסדר.
לחילופין: בחירה של רב-קבוצה (multiset), המכילה k "איברים" <u>לא בהכרח שונים</u> מתוך $[n]$.
למשל: הרב-קבוצה $\{\{1,1,2,4,4,4\}\}$ שווה לרב-קבוצה $\{\{1,4,2,4,1,4\}\}$.
מה מספר האפשרויות?
<u>פתרון א'</u> **:** אפשר לתאר רב-קבוצה באופן יחיד ע"י רישום מספר ההופעות של כל איבר מ-$[n]$.
למשל: $\{\{1,4,2,4,1,4\}\} \to 1^2 2^1 3^0 4^3$
(כאן: $k=6, n=4$)

באופן שקול: רושמים את הרב-קבוצה כסדרת מספרים מונוטונית עולה חלש (לא יורדת).

$$(1,1,2,4,4,4)$$

נוסיף לסדרה <u>חוצצים</u>, המסמנים מעבר ממספר i למספר $i+1$:

$$\underbrace{11}_{1}\Big|\underbrace{2}_{2}\Big|\underbrace{}_{3}\Big|\underbrace{444}_{4}$$

החוצצים מפרידים / מחלקים את הסדרה לבלוקים, בכל אחד מהם עותקים של אותו מספר (בין 1 ל-n). כל מספר נקבע לחלוטין ע"י מספר החוצצים שלפניו (1+), לכן אפשר להחליף את כל המספרים ב-*:

$$**\,|\,*\,|\,|\,***$$

מכל סדרה של חוצצים וכוכבים ניתן לשחזר רב קבוצה יחידה, למשל:

$$\underbrace{}_{1}\Big|\underbrace{**}_{2}\Big|\underbrace{*}_{3}\Big|\underbrace{}_{4}\Big|\underbrace{}_{5}\Big|\underbrace{**}_{6} \rightarrow 22366$$

עלינו למצוא עתה את מספר הסדרות של כוכבים וחוצצים המכילות: <u>k כוכבים, $(n\text{-}1)$ חוצצים</u> **:**

$$\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$$

אם נבחין בין הכוכבים השונים ובין החוצצים השונים: יש $(n-1+k)!$ סדרות אפשריות.

שכחת ההבדלים בין החוצצים $\leftarrow$ חילוק ב- $(n-1)!$.

שכחת ההבדלים בין הכוכבים $\leftarrow$ חילוק ב- $k!$.

לסיכום, מקבלים:

$$\frac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}=\binom{n+k-1}{k}=\binom{n+k-1}{n-1}$$

מסמנים גם:
$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right):=\binom{n+k-1}{k}$$

כאן $k\geq 0$, $n\geq 1$ (יתכן $k<n$, $k=n$, $k>n$).

<u>פתרון ב'</u> **:** (סדרות עולות ממש)

ראינו שאפשר לתאר כל רב-קבוצה של k מתוך n באופן יחיד ע"י סדרה <u>עולה חלש</u> (של מספרים שלמים בתחום $[1,n]$) : $1\leq a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_k\leq n$.

בדוגמא שלנו:

$$\begin{array}{cccccc} 1\leq & 1\leq & 2\leq & 4\leq & 4\leq & 4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array}$$

<u>נגדיר</u> **:** $$(*)\quad b_i:=a_i+i\qquad(1\leq i\leq n)$$

(מוסיפים 1 ל- a_1, 2 ל- a_2 וכו').

מקבלים סדרה <u>עולה ממש</u> של מספרים שלמים: $2 \le b_1 < b_2 < \dots < b_k \le n+k$.

הגדרנו פונקציה $\varphi : A_k\left(1,n\right) \to B_k\left(2,n+k\right)$ בין סדרות עולות חלש

$$A_k\left(1,n\right) := \left\{ \left(a_1, a_2, \dots, a_k\right) \in Z^k \,\middle|\, 1 \le a_1 \le a_2 \le \dots \le a_k \le n \right\}$$

לבין סדרות עולות ממש $B_k\left(2,n+k\right) := \left\{ \left(b_1, b_2, \dots, b_k\right) \in Z^k \,\middle|\, 2 \le b_1 < b_2 < \dots < b_k \le n+k \right\}$.

<u>טענה</u> **:** הפונקציה φ הנ"ל, המוגדרת ע"י $(*)$, היא <u>חח"ע ועל</u>.

<u>שלבי הוכחת הטענה</u> **:**

אם $\left(a_1, a_2, \dots, a_k\right) \in A_k\left(1,n\right)$ אז ברור שהסדרה $\left(b_1, b_2, \dots, b_k\right) = \varphi\left(\left(a_1, a_2, \dots, a_k\right)\right)$ עולה ממש, והיא בתחום הנדרש, ז"א: $\left(b_1, b_2, \dots, b_k\right) \in B_k\left(2,n+k\right)$. לכן φ פונקציה מוגדרת היטב.

φ חח"ע, כי אפשר לשחזר: $\left(1 \le i \le k\right)$ $\quad a_i = b_i - i$. $\quad (**)$

לבסוף, מדוע φ על?

אם $\left(b_1, b_2, \dots, b_k\right)$ סדרה עולה ממש של <u>שלמים</u>, אז $b_i < b_{i+1}$ אומר בעצם: $1 + b_i \le b_{i+1}$ ולכן:

$1 + a_i + i \le a_{i+1} + (i+1)$.

ז"א: $a_i \le a_{i+1}$. וגם: $2 \le b_1 \;\Leftarrow\; 1 \le a_1$, $\;b_k \le n+k \;\Leftarrow\; a_k \le n$.

<u>בסה"כ</u> : φ חח"ע ועל.

מש"ל.

<u>מסקנה</u> **:** $\qquad \left| A_k\left(1,n\right) \right| = \left| B_k\left(2,n+k\right) \right|$

לסיום החישוב נשים לב שיש התאמה חח"ע בין סדרות עולות ממש באורך k בתחום $[2, n+k]$, לבין תת-קבוצות בגודל k של הקבוצה $\left\{2,3,\dots,n+k\right\}$. מספר תת-הקבוצות הוא: $\binom{n+k-1}{k}$.

<u>סיכום</u> **:** <u>מספר הדרכים לבחור k מתוך n</u> **:**

	בלי חזרות	**עם חזרות**
תמורות (יש חשיבות לסדר)	$(n)_k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	n^k
צירופים (אין חשיבות לסדר)	$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

<u>הערה</u> **:** מבחינת סדרי גודל, עבור $n >> k$: $\quad (n)_k \sim n^k \qquad \binom{n}{k}, \left(\binom{n}{k}\right) \sim \dfrac{n^k}{k!}$

---סוף ההרצאה---