פירוש קומבינטורי של פעולות החשבון

<u>נקודת מוצא</u> **:** לכל קבוצה סופית A, מוגדר <u>הגודל</u> (העוצמה) של A : $\#A$, $|A|$ (מספר שלם אי-שלילי).

נרצה לתת "פירוש קומבינטורי" (ע"י פעולות מתאימות בקבוצות) עבור:
שוויון, חיבור, כפל, העלאה בחזקה (של מספרים).
(כמובן: קבוצה $\leftarrow$ מספר, פעולה בקבוצות $\leftarrow$ פעולה במספרים. אנו רוצים להפוך את כיוון החץ.)

<u>שוויון</u> (ואי-שוויון) **:**

<u>משפט</u> **:** שתי קבוצות סופיות A, B הן <u>שוות-גודל</u> ($|A| = |B|$) אם ורק אם קיימת פונקציה $f : A \to B$ שהיא חח"ע ועל.

<u>תזכורת</u> **:**

(1) פונקציה $f : A \to B$ היא <u>חד-חד-ערכית</u> (חח"ע) אם ורק אם לכל $b \in B$ יש מקור אחד לכל היותר (קיים לכל היותר $a \in A$ אחד כך ש- $f(a) = b$).

(2) פונקציה $f : A \to B$ היא <u>על</u> אם ורק אם לכל $b \in B$ יש מקור אחד <u>לפחות</u>.

(3) פונקציה $f : A \to B$ היא <u>חח"ע ועל</u> אם ורק אם f <u>הפיכה</u>.

זאת אומרת קיימת $g : B \to A$ כך ש- : $\begin{cases} f \circ g = id_B \\ g \circ f = id_A \end{cases}$ (*)

כאן " $\circ$ " מסמן <u>הרכבת פונקציות</u>, $id_A : A \to A$ היא <u>פונקצית הזהות</u> על A ($a \mapsto a$). g הנ"ל <u>יחידה</u> ונקראת "הפונקציה <u>ההופכית</u> ל- f ", $g = f^{-1}$.

(4) כל אחת משתי הדרישות ב-(*) מאפיינת תכונה אחת**:**

$f : A \to B$ חח"ע $\Leftrightarrow$ קיימת $g : B \to A$ כך ש-: $g \circ f = id_A$ (g <u>לא בהכרח</u> יחידה)

f על $\Leftrightarrow$ קיימת g כך ש-: $f \circ g = id_B$.

(5) המשפט הנ"ל הוא ברור מאליו (עבור קבוצות סופיות), אבל הוא משמש <u>כהגדרה</u> של גודל (עוצמה) עבור קבוצות אינסופיות.

(6) עבור <u>קבוצות סופיות</u> A ו-B, כל שניים מהתנאים הבאים על פונקציה $f : A \to B$ גוררים את השלישי:

(א) $f : A \to B$ חח"ע.
(ב) $f : A \to B$ על.
(ג) $|A| = |B|$.

ניתן לנסח את עקרון שובך היונים באופן דומה למשפט הנ"ל:

<u>משפט</u> (עקרון שובך היונים) **:**

אם A ו-B קבוצות סופיות וקיימת פונקציה חח"ע $f : A \to B$ אז $|A| \le |B|$.

(בניסוח שקול: אם $|A| > |B|$ אז <u>לא קיימת</u> $f : A \to B$ חח"ע.)

פירוש קומבינטורי של שוויון הוא "התאמה" חח"ע ועל בין שתי קבוצות.

לסיכום :

פירוש קומבינטורי של שוויון $a=b$ הוא : אם A ו-B קבוצות שגודליהן b,a בהתאמה, אז יש $f:A\to B$ חח"ע ועל.

תרגיל : תן שני פירושים לאי-שוויון $a\le b$.

חיבור :

משפט : אם A ו-B קבוצות סופיות וזרות ($\dot\cup$ =: איחוד זר) אז: $|A\dot\cup B|=|A|+|B|$. (זה ברור מאליו!)

שאלה : מה אם הקבוצות אינן זרות?

תשובה : אם A ו-B קבוצות סופיות כלשהן אז: $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

(נדון בהמשך הקורס בהכללה של נוסחה זו.)

הכללה פשוטה של איחוד זר (ליותר משתי קבוצות):

משפט : אם $A_1, A_2, ..., A_n$ קבוצות סופיות זרות בזוגות (ז"א, $A_i\cap A_j=\emptyset$ לכל $i\ne j$) אז:

$$|A_1\dot\cup A_2\dot\cup\ldots\dot\cup A_n|=|A_1|+|A_2|+\ldots+|A_n|.$$

הוכחה : באינדוקציה.

כפל :

תזכורת : המכפלה הקרטזית של קבוצות A, B : $A\times B:=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B\}$.

משפט : אם A ו-B קבוצות סופיות אז: $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

(השתמשנו ב"משפט" זה בהוכחת משפט ארדש-סקרש (על סדרה עולה וסדרה יורדת).)

למשל : $\{1,2\}\times\{1,3\}=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}$ ((1,3) ו-(3,1) הם שונים זה מזה.)

מסקנה : אם a,b שלמים אי-שליליים אז $a\cdot b=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{\text{b פעמים}}$.

הוכחה : נבחר קבוצות (סופיות כמובן) A,B שגודליהן a,b בהתאמה. אזי:

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|=a\cdot b$$

מצד שני, אם נרשום $A=\{x_1,x_2,...,x_a\}$, $B=\{y_1,y_2,...,y_b\}$ אז:

$$A\times B=\{(x_i,y_j)\mid\ 1\le i\le a,\ 1\le j\le b\}=A_1\dot\cup A_2\dot\cup\ldots\dot\cup A_b$$

הוא איחוד זר של הקבוצות: $A_j:=\{(x_i,y_j)\mid\ 1\le i\le a\}$, זאת אומרת:

$$A_1=\{(x_1y_1),(x_2,y_1),...,(x_a,y_1)\}$$

.

.

$\cdot$

$\cdot$

$$A_b = \{(x_1 y_b),(x_2, y_b),\dots,(x_a, y_b)\}$$

ברור : $A_1, A_2, \dots, A_b$ קבוצות זרות. $A \times B = \underbrace{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_b}_{\text{פעמים } |A|}$, $|A_j| = |A|$ <u>לכל</u> $1 \le j \le b$.

<u>למשל</u> : $f : A \to A_j$ היא חח"ע ועל $(x \mapsto (x, b_j))$.

<u>הערה</u> : אפשר לקחת גם $A = \emptyset$ (קבוצה ריקה), ואז $|A| = 0$.

<u>העלאה בחזקה</u> :

<u>תזכורת</u> : אם A ו-B קבוצות כלשהן אז: $B^A := \{ f \mid f : A \to B \}$.

<u>משפט</u> : אם A ו-B קבוצות סופיות <u>לא ריקות</u> אז: $|B^A| = |B|^{|A|}$.

אם $A = \emptyset$, $B \neq \emptyset$ אז $|B^A| = 1$,

אם $A \neq \emptyset$, $B = \emptyset$ אז $|B^A| = 0$,

אם $B = A = \emptyset$ אז $|B^A| = 1$ (זה מתאים למוסכמה $0^0 = 1$).

<u>רעיון הוכחה</u> :

אם $A = \{x_1, x_2, \dots, x_a\}$ (בסדר לינארי כלשהו) אז כל פונקציה $f : A \to B$ ניתנת לתיאור ע"י <u>סדרת הערכים</u> שלה: $(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \in \underbrace{B \times B \times \dots \times B}_{\text{פעמים a}}$.

ומכאן ניתן לבנות פונקציה חח"ע ועל: $\varphi : B^A \to B \times B \times \dots \times B$

($B^A =:$ אוסף הפונקציה $f : A \to B$).

ולכן (<u>פירוש קומבינטורי לשוויון ולכפל</u>):

$$|B^A| = \underbrace{|B \times B \times \dots \times B|}_{\text{פעמים a}} = \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{\text{פעמים a}} = b^a$$

<u>דוגמא</u> : תהי A קבוצה סופית. מהו מספר התת-קבוצות של A?

<u>סימון</u> : $p(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$.

<u>טענה</u> : $|p(A)| = 2^{|A|}$.

<u>הוכחה</u> : לכל קבוצה $B \in p(a)$ (ז"א: תת-קבוצה $B \subseteq A$) נתאים את <u>הפונקציה האופיינית</u> שלה:

$$\chi_B : A \to \{0,1\}, \qquad \chi_B(x) := \begin{cases} 0 & , x \notin B \\ 1 & , x \in B \end{cases}$$

קל לראות שקיבלנו פונקציה חח"ע ועל.

אם נגדיר $\varphi : p(A) \to \{0,1\}^A$ ע"י: $(\forall B \subseteq A) \quad \varphi(B) := \chi_B$.
נגדיר גם פונקציה בכיוון השני: $\psi : \{0,1\}^A \to p(A)$

ע"י: $(\forall \chi : A \to \{0,1\}) \quad \psi(\chi) = \{a \in A \mid \chi(a) = 1\}$.

<u>דוגמא</u> **:** $A = \{x, y, z\}$, $B = \{x, z\}$.

$$\chi_B : \begin{cases} x \mapsto 1 \\ y \mapsto 0 \\ z \mapsto 1 \end{cases}$$

קל לראות: $\psi \circ \varphi = id_{p(A)}$, $\varphi \circ \psi = id_{\{0,1\}^A}$.

מכאן נובע ש- φ חח"ע ועל מ-$p(A)$ ל-$\{0,1\}^A$ (וכמובן $\psi = \varphi^{-1}$), ז"א:

$$|\, p(A) \,| = \left| \{0,1\}^A \right| = |\, \{0,1\} \,|^{|A|} = 2^{|A|}$$

מש"ל.

---סוף ההרצאה---