עקרון שובך היונים

<u>סימון</u> : $|A|, \#A =$ <u>הגודל</u> (עוצמה) של קבוצה סופית A.

<u>טענה</u> : (עקרון שובך היונים, עקרון Dirichlet)

אם B, A קבוצות סופיות: $f : A \to B$ פונקציה חח"ע, אז $|A| \le |B|$.

(ניסוח שקול : אם m יונים גרות ב- n שובכים, כשבכל שובך יונה אחת <u>לכל היותר</u>, אז $m \le n$.)

<u>דוגמאות</u> :

(1) קיימים שני סינים עם אותה משכורת חודשית (חיובית).

<u>הוכחה</u> :

קיימים $> 10^9$ סינים וכנראה $> 10^8$ סינים עם משכורת חיובית. יש לא יותר מ- 10^8 משכורות חודשיות שונות, כי המשכורת המרבית $\le 10^6$ יואן.

תהי : $f : \{$ סינים עם משכורת חיובית $\} \to \{$ משכורות $\}$

המתאימה לכל סיני עם משכורת חיובית את משכורתו. אילו f היתה חח"ע, היה:

$|$ משכורות אפשריות $| \le |$ סינים עם משכורת $|$

בסתירה לאמור לעיל. לכן f לא חח"ע, וזה מש"ל.

(2) יש בחדר זה שני בני-אדם שנולדו באותו תאריך בחודש העברי (אולי בחודשים שונים).

<u>הוכחה</u> : מספר הנוכחים > 30

<u>שאלת המשך</u> : כמה בני-אדם דרושים כדי שבהסתברות ≤ 0.5 יהיו שנים מהם שנולדו באותו תאריך בשנה?

<u>עובדה מפתיעה</u> : בהנחה שבשנת-חמה יש 365 ימים, מספיקים 23 אנשים כדי לקבל הסתברות ≤ 0.5 (נוכיח בעתיד). התוצאה ד' דומה לגבי שנה עברית רגילה \ מעוברת.

<u>תרגיל</u> : כמה אנשים דרושים לקבלת הסתברות ≤ 0.5 לאותו תאריך בשנה וגם אותו יום בשבוע?

(3) קירוב ע"י רציונאליים: כידוע, בגלל צפיפות הרציונאליים בתוך הממשיים, לכל α <u>ממשי אי-רציונאלי</u> ומספר $\varepsilon > 0$ קיימים n, m שלמים $(\neq 0)$ כך ש-: $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \varepsilon$.

<u>טענה</u> :

יהי α מספר אי-רציונאלי ויהי $\varepsilon > 0$. אזי קיימים n, m שלמים $(\neq 0)$ כך ש-:

$$|n\alpha - m| < \varepsilon$$

<u>בפרט</u>, אפשר לקרב היטב מספר אי-רציונאלי ע"י מספר רציונאלי: $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{\varepsilon}{n}$.

<u>הוכחה</u> :

מספיק להוכיח שלכל α אי-רציונאלי ו- N טבעי קיימים $m, n \neq 0$ שלמים כך ש- :

$|n\alpha - m| < \frac{1}{N}$ (כי בהינתן $\varepsilon > 0$, נבחר N טבעי כך ש- $\frac{1}{N} < \varepsilon$).

<u>נתונים</u> : N טבעי, α אי-רציונאלי. לכל $x \in \mathbf{R}$ נגדיר:

$\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbf{Z} : k \le x\}$ (החלק השלם של x)

$\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ (החלק השבור של x)

<u>למשל</u> : $\left\{3\frac{1}{4}\right\}=0.25$, $\left\lfloor 3\frac{1}{4}\right\rfloor=3$, $\left\{-3\frac{1}{4}\right\}=0.75$, $\left\lfloor -3\frac{1}{4}\right\rfloor=-4$.

<u>תמיד נכון</u> : $0\le\{x\}<1$, ושוויון $\{x\}=0 \Leftrightarrow x$ <u>שלם</u>.

נתבונן בסדרת המספרים: $\{\alpha\},\{2\alpha\},\{3\alpha\},...,\{(N+1)\alpha\} \qquad (*)$

נתבונן גם בסדרת הקטעים החצי פתוחים:

$$(**) \qquad \left[0,\frac{1}{N}\right),\left[\frac{1}{N},\frac{2}{N}\right),\left[\frac{2}{N},\frac{3}{N}\right),...,\left[\frac{N-1}{N},1\right)$$

כל אחד מהמספרים $(*)$ הוא בקטע $[0,1)$, ולכן שייך בדיוק לאחד הקטעים $(**)$. יש $N+1$ מספרים אבל רק N קטעים. לפי עקרון שובך היונים יש שני מספרים, נאמר $\{k\alpha\}$, $\{l\alpha\}$ באותו קטע $(1\le l<k\le N+1)$.

לכן <u>ההפרש</u> : $\left|\{k\alpha\}-\{l\alpha\}\right| <$ "אורך הקטע" $=\frac{1}{N}$,

$$\left|k\alpha-\lfloor k\alpha\rfloor-l\alpha+\lfloor l\alpha\rfloor\right|<\frac{1}{N},$$

נסמן : $n:=k-l$, $m:=\lfloor k\alpha\rfloor-\lfloor l\alpha\rfloor$, ואז $|n\alpha-m|<\frac{1}{N}$.

m,n שלמים, $n>0$ (ואפשר להניח גם $m\neq 0$ אם $\alpha\neq 0$, N גדול מספיק).

<u>שאלה</u> (1) : האם קיימת סדרה של 4 מספרים (ממשיים) שונים <u>שאין לה</u> תת-סדרה עולה באורך 3 וגם <u>אין לה</u> תת-סדרה יורדת באורך 3?

מסתבר <u>שיש</u> סדרה כזאת.

<u>דוגמה</u> : הסדרה 3,6,1,2 <u>אין לה</u> תת-סדרה עולה/יורדת באורך 3.

<u>שאלה</u> (2): האם קיימת סדרה של <u>5</u> מספרים (ממשיים) שונים שאין לה תת-סדרה עולה באורך 3 וגם אין לה תת-סדרה יורדת באורך 3?

מסתבר <u>שאין</u> סדרה כזאת.

<u>משפט (Erdös-Szekeres, 1935)</u> :

יהיו $m,n\ge 0$ שלמים. אזי לכל סדרה של $mn+1$ מספרים (ממשיים) שונים יש:

<u>או</u> תת-סדרה <u>עולה</u> באורך $m+1$, <u>או</u> תת-סדרה <u>יורדת</u> באורך $n+1$ (או שתיהן).

(עבור שאלה (2) מקבלים: $m+1=n+1=3$, $m=n=2$, $mn+1=5$).

<u>הערה</u> : המספר $mn+1$ הוא <u>הטוב ביותר האפשרי</u>.

אפשר למצוא סדרה באורך mn <u>שאין לה</u> תת-סדרה כנ"ל (n "בלוקים" שהם סדרות עולות באורך m):

$$...,m+1,m+2,...,2m,1,2,...,m$$

כל תת-סדרה עולה מוכלת כולה באחד הבלוקים, ולכן אורכה $\le m$.

כל תת-סדרה יורדת מכילה לכל היותר איבר אחד מכל בלוק, ולכן אורכה $\le n$.

<u>הוכחת המשפט</u> :

תהי נתונה סדרת מספרים (ממשיים) $x_1, x_2, ..., x_k$ שאין לה תת-סדרה עולה באורך $m+1$ וגם אין לה תת-סדרה יורדת באורך $n+1$. עלינו להוכיח $k \le mn$.

לכל $1 \le i \le k$ נסמן:

a_i =: האורך המירבי של תת-סדרה עולה המתחילה ב- x_i.

b_i =: האורך המירבי של תת-סדרה יורדת המתחילה ב- x_i.

<u>דוגמה</u> :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_i :	3	5	1	7	2
a_i :	3	2	2	1	1
b_i :	2	2	1	2	1

נשים לב שהמספרים $(b_i),(a_i)$ לא בהכרח שונים, וסדרות אלו לא בהכרח יורדות (חלש).

<u>לפי הנחתנו</u> : $1 \le a_i \le m$, $1 \le b_i \le n$ $(\forall i)$. לכן יש <u>לכל היותר</u> mn אפשרויות עבור הזוג (a_i, b_i).

<u>טענה</u> : כל <u>הזוגות</u> (a_i, b_i) שונים, ז"א: $i \ne j \Rightarrow (a_i, b_i) \ne (a_j, b_j)$.

<u>הוכחה</u> :

נניח שקיימים $i \ne j$ עם $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$. בלי הגבלת הכלליות: $i < j$. אם $x_i < x_j$ אז לכל ת"ס עולה המתחילה ב- x_j נוכל לצרף בתחילתה את x_i ולקבל ת"ס עולה ארוכה יותר, לכן $a_i > a_j$ בסתירה להנחתנו. להיפך, אם $x_i > x_j$ נעשה אותו דבר לסדרות יורדות ונקבל $b_i > b_j$ ושוב סתירה.

הוכחנו שכל הזוגות (a_i, b_i) $(1 \le i \le k)$ שונים. יש רק mn זוגות אפשריים. לכן אורך הסדרה $k \le mn$, לפי עקרון שובך היונים. מש"ל.

---סוף ההרצאה---