מהי קומבינטוריקה ?

<u>שאלה</u> : מהי קומבינטוריקה ?
חקירה של מבנים מתמטיים על קבוצות בדידות (בפרט, סופיות).
דוגמא לקבוצה בדידה לא סופית: המספרים השלמים ($\mathbf{Z}$).

<u>שאלה</u> : מה חוקרים (לגבי מבנים סופיים)?
קיום, ספירה, מיון ואופטימיזציה.

שמות נרדפים לתחום (פחות או יותר) :
תורת הצירופים = *combinatorics*
מתמטיקה סופית = *finite mathematics*
מתמטיקה בדידה = *discrete mathematics*

<u>דוגמה</u> :
כיסוי לוח משובץ ע"י אבני דומינו.
(לוח בגודל 8×8, או באופן כללי : גודל $m\times n$)

<u>קיום</u> :
<u>שאלה</u> : האם <u>אפשר</u> לכסות לוח בגודל $m\times n$ ע"י אבני דומינו? (כל משבצת מכוסה רק פעם אחת.)
<u>התשובה</u> : כן $\Leftrightarrow$ השטח mn <u>זוגי</u>.
<u>הסבר</u> :
mn *אי-זוגי* $\Leftarrow$ מספר אי-זוגי של משבצות ואי אפשר לכסות (כל אבן דומינו מכסה 2 משבצות).
n *זוגי* $\Leftarrow$ כל שורה אפשר לכסות ע"י אבני דומינו ולכן גם את כל הלוח. כנ"ל אם m זוגי (לעמודות).

<u>שאלה</u> : לוח $n\times n$ (n *זוגי*) שהורדו ממנו שתי משבצות בפינות נגדיות. האם אפשר לכסות?
<u>פתרון</u> : נניח $n=2k$. נצבע את המשבצות שחור-לבן כמו בלוח שחמט. משבצות בפינות נגדיות הן בעלות אותו צבע ולכן נשארות $2k^2$ משבצות מצבע אחד ו- $(2k^2 - 2)$ משבצות מצבע שני (אין איזון!).
כל אבן דומינו מכסה משבצת אחת מכל צבע ולכן <u>אי אפשר</u> לצבוע.

<u>שאלה</u> : מה קורה אם מורידים מלוח $m\times n$ *שתי* משבצות שאינן מאותו צבע? האם תמיד אפשר לצבוע?
<u>תשובה</u> : *ראה דף תרגיל מספר 1*.

<u>ספירה</u> :
<u>שאלה</u> : בהינתן לוח משובץ בגודל $m\times n$, מהו <u>מספר הכיסויים האפשריים</u> ע"י אבני דומינו?

<u>נגדיר</u>: $a_{m,n}$ =: מספר הכיסויים של לוח $m\times n$.
<u>ננסה ללוחות קטנים</u> :

עבור <u>$m=1$</u> : $a_{1,n}=\begin{cases}0, & n\ odd\\ 1, & n\ even\end{cases}$

עבור <u>$m=2$</u> : $a_{2,1}=1,\ a_{2,2}=2,\ a_{2,3}=3,\ a_{2,4}=5,\ \ldots$

(סדרת פיבונצ'י : $a_1+a_2=a_3\ ,a_2+a_3=a_4,\ldots$) $a_{2,n}=$ <u>מספר פיבונצ'י</u> (נלמד בהמשך הקורס).

עבור <u>m כללי</u> : ננסה למצוא חסמים (מלעיל ומלרע).
ללוח כללי בגודל $m \times n$, <u>אם</u> n,m *זוגיים* אפשר לחלק לריבועים בגודל 2×2 .
כל ריבוע אפשר לכסות <u>בשתי דרכים</u> (באופן בלתי תלוי בריבועים האחרים).
בסה"כ מקבלים $2^{mn/4}$ כיסויים ($mn/4$ = מספר הריבועים 2×2 בלוח).
קיבלנו *חסם מלרע* (תחתון) : $2^{mn/4} \le a_{m,n}$.

<u>שאלה</u> : איך נמצא *חסם מלעיל* (עליון)?
לכל משבצת ספציפית יש עד 4 אפשרויות לכסות ע"י אבן דומינו. אם נכפיל על כל המשבצות נקבל:

$$a_{m,n} \le 4^{mn}$$

בעצם, מספיק להכפיל על כל המשבצות הלבנות (זה קובע לחלוטין את הכיסוי). $4^{mn/2} = 2^{mn}$.

<u>סיכום</u> : $(\sqrt[4]{2})^{mn} \le a_{m,n} \le 2^{mn}$ (תלות מעריכית בשטח המלבן)

<u>אפשר לשפר</u> את החסמים (ראה תרגיל מספר 1) .

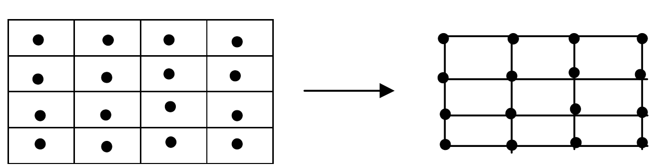
יתר על כן: מסתבר שקיימת <u>נוסחה מדויקת</u> ל- $a_{m,n}$: $[Kasteleyn, Fischer, 1961]$

$$a_{m,n} = \left[\prod_{k=1}^{m}\prod_{l=1}^{n} 4\left(\cos^2 \tfrac{k\pi}{m+1} + \cos^2 \tfrac{l\pi}{n+1}\right)\right]^{1/4}$$

הנוסחה תמיד נותנת <u>מספר שלם</u>!
הנוסחה נכונה גם כאשר m,n <u>אי-זוגיים</u>, ואז כמובן $a_{m,n} = 0$.
<u>הערה</u> : מספר הכיסויים המדויק של לוח 8×8 הוא: $12988816 = 3604^2$. (ריבוע שלם!)

<u>מיון</u> :
אפשר למיין את הכיסויים השונים של לוח $m \times n$, למשל לפי המספר v של אבני הדומינו האנכיות. אפשר לשאול: כמה כיסויים יש עם v נתון ? איך משתנה המספר כפונקציה של v (התנהגות סטטיסטית) ?

<u>אופטימיזציה</u> : (ואלגוריתמים)
נתאים ללוח $m \times n$ גרף כדלקמן:
קדקודי הגרף = משבצות הלוח.
קשתות הגרף = זוגות של משבצות סמוכות (אופקית או אנכית).
למשל: ($m = n = 4$)



לוח 4×4 גרף

אבן דומינו = בחירת קשת בגרף.
כיסוי ע"י דומינו = אוסף קשתות זרות בקדקודים המכסות את כל קדקודי הגרף, ז"א:
<u>זיווג מושלם</u> (*perfect matching*).

<u>סדרי גודל :</u>

תהיינה $f:\mathbf{N}\to\mathbf{R}^+$ ו- $g:\mathbf{N}\to\mathbf{R}^+$ שתי פונקציות כאשר $\mathbf{N}=\{1,2,3,...\}$ (מספרים טבעיים)
ו-$\mathbf{R}^+=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$ ($\mathbf{R}=$ שדה הממשיים).

<u>נסמן</u> :

$f=O(g)$ אם קיימים קבוע $c>0$ ומספר טבעי n_0 כך ש- $(\forall\, n\ge n_0)$ $\frac{f(n)}{g(n)}\le c$.

$f=\Omega(g)$ אם קיימים קבוע $c>0$ ומספר טבעי n_0 כך ש- $(\forall\, n\ge n_0)$ $\frac{f(n)}{g(n)}\ge c$.

$f=\Theta(g)$ אם קיימים קבועים $c_1,c_2>0$ ומספר טבעי n_0 כך ש- $(\forall\, n\ge n_0)$ $c_1\le\frac{f(n)}{g(n)}\le c_2$
.($\Theta=$"O וגם Ω")

$f\sim g$ אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=1$ (f,g <u>מאותו סדר גודל</u>).

$f=o(g)$ אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$.

f בעלת <u>גידול פולינומיאלי</u> אם קיימים $\alpha>0$ ממשי, $c>0$ כך ש- $f(n)\sim cn^{\alpha}$.
(לפעמים דורשים רק $f(n)=\Theta(n^{\alpha})$ או אפילו $f(n)=O(n^{\alpha})$).

f בעלת <u>גידול מעריכי</u> (אקספוננציאלי) אם קיימים $\beta>1$, $c>0$ כך ש- $f(n)\sim c\,\beta^n$.
(לפעמים דורשים רק $\log f(n)\sim n\log\beta$).

שתי הדרישות לגידול מעריכי <u>אינן</u> שקולות :
אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{c\,\beta^n}=1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log f(n)}{n\log\beta}=1$ אך <u>לא להיפך</u>.

<u>למשל</u> : $f(n)=n^3 10^n$. כאן (כאשר $n\to\infty$) $\frac{f(n)}{10^n}\to\infty$, $\frac{f(n)}{(10+\varepsilon)^n}\to 0$ (לכל $\varepsilon>0$)

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{c\,\beta^n}\ne 1$ <u>לכל</u> $\beta>1$, $c>0$.

<u>מצד שני</u> : $\log f(n)=3\log n+n\log 10$ ולכן $\frac{\log f(n)}{n\log 10}\to 1$.

<u>עובדה</u> : $n^{\alpha}=o(\beta^n)$ <u>לכל</u> $\alpha>0$, $\beta>1$ (גידול פולינומיאלי הוא פחות מגידול מעריכי).

---סוף ההרצאה---