

תרגיל 8 : ספירה בתנאי סימטריה (פתרונות)

1. חבורת הסימטריה G מורכבת מהעתקת הזהות, מסיבוב ב- 180° סביב המרכז, ומשני שיקופים (בציר אנכי ובציר אופקי). על-ידי ספירת המחזורים של כל אחת מ-4 הסימטריות (כתמורה על 6 משבצות הלוח) נקבל:

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g| = \frac{1}{4} (c^6 + c^4 + 2c^3)$$

2. חבורת הסימטריה היא ציקלית (C_7) ומורכבת מסיבובים בלבד. לכל אבריה, פרט לתמורת הזהות, יש מחזור יחיד. מספר המסלולים של צביעות הוא:

$$k = \frac{1}{7} (c^7 + 6c)$$

3. בחבורה הדיהדרלית D_6 יש 6 סיבובים ו-6 שיקופים. 3 מהשיקופים הם בעלי 3 מחזורים, ו-3 הם בעלי 4 מחזורים כל אחד. מספרי המחזורים של הסיבובים הם: 6, 1, 2, 3, 2, 1. מספר המסלולים של צביעות הוא:

$$k = \frac{1}{12} (c^6 + 3c^4 + 4c^3 + 2c^2 + 2c)$$

4. כל איבר בחבורה הסימטרית S_4 (חבורת כל התמורות על 4 אברים) ניתן למימוש כסיבוב או כשיקוף של הארבעון המשוכלל. $4! = 24$ אברי S_4 הם מהטיפוסים הבאים, לפי ארכי המחזורים שלהם:

- 1 תמורה (תמורת הזהות) מטיפוס (1)(2)(3)(4) (4 מחזורים);
- 6 תמורות מטיפוס (12)(3)(4) (3 מחזורים);
- 8 תמורות מטיפוס (123)(4) (2 מחזורים);
- 3 תמורות מטיפוס (12)(34) (2 מחזורים);
- 6 תמורות מטיפוס (1234) (1 מחזור).

לכן מספר המסלולים של צביעות הוא:

$$k = \frac{1}{24} (c^4 + 6c^3 + 11c^2 + 6c)$$

5.

(א) כאן החבורה הסימטרית S_4 פועלת על 6 הקשתות של הגרף השלם K_4 , שקדקודיו מסומנים 1-4. מיון התמורות בשאלה 4 לעיל נותן את החלוקות הבאות של קשתות הגרף השלם:

- 1 תמורה מטיפוס (1)(2)(3)(4); על קשתות: (12)(13)(14)(23)(24)(34).
 - 6 תמורות מטיפוס (12)(3)(4); על קשתות: (12)(13,23)(14,24)(34).
 - 8 תמורות מטיפוס (123)(4); על קשתות: (12,23,13)(14,24,34).
 - 3 תמורות מטיפוס (12)(34); על קשתות: (12)(13,24)(14,23)(34).
 - 6 תמורות מטיפוס (1234); על קשתות: (12,23,34,14)(13,24).
- לכן מספר המסלולים של צביעות הוא:

$$k = \frac{1}{24} (c^6 + 9c^4 + 14c^2)$$

(ב) זהו המקרה הפרטי $c=2$ של סעיף א': כל קשת של K_4 צבועה בצבע "יש קשת" או בצבע "אין קשת". לכן

$$k = \frac{1}{24}(2^6 + 9 \cdot 2^4 + 14 \cdot 2^2) = 11$$

(כדאי לצייר את 1,1,2,3,2,1,1 הגרפים על 4 קדקודים עם 6,5,4,3,2,1,0 קשתות, בהתאמה.)