

תרגיל 7 : נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל

(שאלות מתוך בחינות)

1. (תשנ"ג א)
 - (א) כמה מספרים שלמים בין 1 ל-1000 זרים למספר 45 ?
 - (ב) כמה מהמספרים הנ"ל זרים גם למספר 48 ?
2. (תשנ"ג ב)
 - (א) כמה מספרים שלמים בין 1 ל-1000 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 4, 5, 6 ?
 - (ב) כמה מספרים כנ"ל מתחלקים בדיוק באחד מהמספרים 4, 5, 6 ?
3. (תשנ"ד א) כמה מספרים בין 1 ל-7000 מתחלקים בדיוק באחד מן המספרים 3, 4, 5 ?
4. (תשנ"ה א) מטילים קוביה n פעמים. מה ההסתברות שכל אחת מן התוצאות 1, 2, 3, 4, 5, 6 תתקבל לפחות פעם אחת ? (אין דרישה לגבי 2, 4, 6).
5. (תשנ"ה ב)
 - (א) כמה מספרים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק באחד מן המספרים 3, 4, 5 ?
 - (ב) כנ"ל לגבי מספרים בין 1001 ל-2000.
6. (תשנ"ו א)
 - (א) מה ההסתברות שב-100 הטלות של קוביה התקבלו בדיוק 5 תוצאות שונות (מתוך 1, 2, ..., 6) ?
 - (ב) מה ההסתברות שב-100 הטלות קוביה התקבלו לכל היותר 5 תוצאות שונות ?
7. (תשנ"ז ב) חשב כמה מספרים שלמים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק בשנים 7, 8, 9.
8. (תשנ"ז א) כמה מספרים שלמים בין 1 ל-1000 מתחלקים בדיוק באחד מהמספרים 3, 5, 7 ?
9. (תשנ"ז ב) דוור מביא חשבונות טלפון ל-6 הדירות בבנין, חשבון אחד לכל דירה. בגלל עייפותו הרבה הוא מחלק את החשבונות באופן אקראי, אך מקפיד לשים חשבון אחד בלבד בכל תיבת דואר. מה ההסתברות שבדיוק שלושה מהחשבונות יגיעו לכתובותיהם הנכונות ?
10. (תשנ"ח א) מטילים קוביה n פעמים.
 - (א) מה ההסתברות שכל אחד מהמספרים הזוגיים (2, 4, 6) התקבל לפחות פעם אחת ?

(ב) מה ההסתברות שמבין המספרים האי-זוגיים $(1, 3, 5)$, בדיוק שניים התקבלו (פעם אחת לפחות) ואחד לא התקבל כלל ?

11. (תשנ"ח ב) יהי $a(n, k)$ מספר הפונקציות $f: [n] \rightarrow [k]$ (כאשר $[n] := \{1, \dots, n\}$) שהן "כמעט על" במובן הבא: f מקבלת בדיוק $k-1$ ערכים שונים, ז"א: "מפספסת" בדיוק ערך אפשרי אחד.
(א) מצא נוסחאות מפורשות עבור $a(n, 2)$, $a(n, 3)$.
(ב) בעזרת נוסחת ההכללה וההוצאה מן הכלל מצא ביטוי פשוט ככל האפשר עבור $a(n, k)$ (k כללי). בדוק שתשובתך (במקרים הפרטיים $k=2, 3$) מתאימה לסעיף א' לעיל.

12. (תשנ"ט א) מצא את מספר התמורות $\pi \in S_{2n}$ שעבורן $\pi(i) \neq i$ לכל i זוגי (אין הגבלה עבור i אי-זוגי).

13. (תשנ"ט א) מצא כמה מספרים בין 1 ל-10000 הם אי-זוגיים, אינם מתחלקים ב-7 ואינם ריבועים שלמים.

14. (תשנ"ט ב) מצא את מספר התמורות $\pi \in S_n$ שיש להן בדיוק k נקודות-שבת, ז"א: $\#\{i \mid \pi(i) = i\} = k$

15. (תש"ס א)

(א) כמה מספרים בין 1 ל-3000 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 3, 4, 5?

(ב) כמה מספרים בין 1 ל-3000 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 4, 5, 6?

16. (תשס"א א) מטילים קוביה n פעמים. מה ההסתברות שכל אחת מ-6 התוצאות האפשריות תתקבל (לפחות פעם אחת) ?

17. (תשס"א ב) יהיו $m \geq n$ מספרים טבעיים נתונים. מצא את מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f: [n] \rightarrow [m]$ המקיימות: $f(i) \neq i \quad (\forall i)$.

18. (תשס"ב א) מטילים קוביה n פעמים בזו אחר זו. מה ההסתברות שהתקבלו בסך הכל בדיוק שלושה ערכים שונים (מתוך ששת הערכים האפשריים) ?

19. (תשס"ב ב) מגרילים מספר שלם $1 \leq n \leq 10^{100}$. מה ההסתברות שהמספר $n-1$ (בהצגתו העשרונית, כולל אפסים מובילים) מכיל את כל עשר הספרות ?