תרגיל 6 : נוסחאות נסיגה (פתרונות)

.1

א) $F_n = 2^n + 3^n - (-1)^n$

ב) $F_n = (-1)^n + (n-1)\cdot 3^n$

.2

א) כמו 1א.

ב) כמו 1ב.

.3

א) $F_n = a\cdot 4^n + b\cdot(-1)^n + \frac{25}{6}\cdot 5^n$

ב) $F_n = a\cdot 4^n + \left(b+\frac{n}{5}\right)\cdot(-1)^n$

ג) $F_n = (a-4n-4n^2)\cdot 4^n + b\cdot(-1)^n - \frac{5}{6}$

.4

א) הפונקציה היוצרת $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ מקיימת: $\frac{1}{1-x}\cdot f(x) = \frac{1}{1-3x}$. לכן $f(x) = \frac{1-x}{1-3x} = 1 + \frac{2x}{1-3x}$, והמקדמים: $(n\ge 1) \quad F_n = 2\cdot 3^{n-1}, \quad F_0 = 1$.

לחילופין, ע"י הצבת $n-1$ במקום n בנוסחת הנסיגה וחיסור מהנוסחה עבור n נקבל מיד $(n\ge 1) \quad F_n = 3^n - 3^{n-1}$ ☺.

ב) כאן הפונקציה היוצרת מקיימת: $\frac{1}{(1-x)^2}\cdot f(x) = \frac{1}{1-3x}$. לכן $f(x) = \frac{(1-x)^2}{1-3x} = 1 + x + \frac{4x^2}{1-3x}$, ומכאן: $(n\ge 2) \quad F_n = 4\cdot 3^{n-2}, \quad F_0 = F_1 = 1$.

ג) כאן, אם נגדיר $F_0 = 0$, נקבל: $f(x)^2 = f(x) - x$. לכן $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$,

ומכאן: $(n\ge 1) \quad F_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}, \quad F_0 = 0$

.5 $(n\ge 2) \quad a_n = 2^{n-2}$

.6 $(n\ge 0) \quad a_n = 3^n + (-1)^n - n - 2$

.7 $n + 2\cdot\binom{n}{2} = n^2$

.8 $a_n = (1-n)\cdot 2^n$

9. פתרון כללי: $a_n = \frac{1}{4}\cdot 2^n + (\alpha + \beta n + \frac{1}{2}\cdot n^2)\cdot(-2)^n$
פתרון פרטי: $a_n = \frac{1}{4}\cdot 2^n + \frac{1}{4}\cdot(-1-2n+2n^2)\cdot(-2)^n$

10.
א) $c_3 = 0, \quad c_4 = 1/2, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = 1/2$
ב) $c(x) = 1-\sqrt{1-2x^2}$
ג) $c_{2n} = \frac{1}{n2^{n-1}}\binom{2n-2}{n-1} \quad (n \ge 1)$
$c_0 = 0, \quad c_{2n+1} = 0 \quad (n \ge 0)$

11. $a_n = 4\cdot(2^n - 1) - \frac{1}{2}(n^2 + 7n)$

12.
א) $c_1 = 1, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 9$
ב) $c(x) = \frac{1-2x}{1-3x}$
ג) $c_n = 3^{n-1} \quad (n \ge 1)$

13. $a_n = (n-1)\cdot 2^n + n$

14.
א) $t_n = t_{n-1} + t_{n-3} \quad (n \ge 3)$, $t_0 = t_1 = t_2 = 1$.
ב) $t(x) = \frac{1}{1-x-x^3}$
ג) באינדוקציה, בעזרת נוסחת הנסיגה ובגלל: $1 < \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3$.

15. נוסחת נסיגה: $a_n = a_{n-1} + n \quad (n \ge 2)$, עם תנאי התחלה $a_1 = 2$ (או $a_0 = 1$).
<u>תשובה:</u> $a_n = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$.

16. $a_n = (2+i)(1+i)^n + (2-i)(1-i)^n - 2^{n+1} = 2^{n/2}(4\cos\frac{\pi n}{4} - 2\sin\frac{\pi n}{4}) - 2^{n+1}$

17.
א) $F_n = 3^{n+2} - 2^{n+3} - 1 \quad (n \ge 0)$
ב) שורשים 3,2,1 לפולינום האופייני נותנים:
$a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0 \quad (n \ge 3)$

.18

א) פתרון כללי: $F_n = (\alpha + \beta n)\cdot 1^n + \gamma \cdot (-2)^n$. עבור גידול פולינומיאלי $\gamma = 0$, ובצירוף תנאי ההתחלה: $F_n = n+1$.

ב) לפתרון מעריכי טהור $\alpha = \beta = 0$, ולכן $F_n = \gamma \cdot (-2)^n$ (γ קבוע כלשהו).

.19

א) $A_3 = 5$

ב) $A_n = A_{n-1} + 2A_{n-2} \quad (n \geq 3)$

ג) $A_n = \frac{2}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{3}\cdot(-1)^n$

.20

א) $F_n = (1-2n)\cdot(-2)^n \quad (n \geq 0)$

ב) $G_n = (1-4n)\cdot 4^n \quad (n \geq 0)$. שורש כפול 4 לפולינום האופייני נותן כנוסחת נסיגה: $G_n - 8G_{n-1} + 16G_{n-2} = 0$.

.21

א) $a_n = 2 + (2n-1)\cdot(-1)^n \quad (n \geq 0)$

ב) שורשים $1,-1,-1$ לפולינום האופייני נותנים נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית מסדר 3: $a_n + a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} = 0$, עם תנאי התחלה $a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = 5$.

.22

א) $a_n = 1^n + (-1)^n + 2^n \quad (n \geq 0)$

ב) שורשים $2,-1$ לפולינום האופייני נותנים נוסחת נסיגה לינארית מסדר 2: $a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = c$, עם אגף ימין קבוע $c = -2$ (מתקבל מהצבת $n = 2$).

.23

א) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cdot(-1)^n - 2\cdot(-2)^n \quad (n \geq 0)$

ב) מיידי מנוסחת הנסיגה (מקדם a_n הוא 1, שאר המקדמים שלמים).

ג) מספיק לקחת a_2, a_1 שלמים אבל a_0 לא שלם, למשל: $a_n = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\cdot(-1)^n + \frac{1}{2}\cdot(-2)^n \quad (n \geq 0)$.

.24

א) $a_n = 1 + \alpha\cdot(-2)^n \quad (n \geq 0)$ (המחובר $\beta n \cdot (-2)^n$ גדול מדי).

ב) $a_n = 1 + \beta n \cdot (-2)^n \quad (n \geq 0)$.

.25

א) $d_1 = 1$, $d_2 = 5$, $d_3 = 11$.

ג) $(n \ge 0)$ $d_n = (-1)^n + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1+\sqrt{3}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(1-\sqrt{3}\right)^n$

.26 $(n \ge 0)$ $a_n = 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 4^n - 9 \cdot 3^n$

.27 $(n \ge 0)$ $a_n = (3n-4) \cdot 2^n + 5$

.28

א) פולינום ב-n מתקבל כפתרון לנוסחת נסיגה לינארית הומוגנית רק אם 1 הוא שורש כפול (לפחות) של הפולינום האופייני. אצלנו זה מחייב $c = -2$.
(הערה: גם $c = 2$ נותן שורש כפול -1, אבל אז הפתרון הכללי $a_n = (\beta + \gamma n) \cdot (-1)^n$ אינו פולינום טהור.)

ב) $a_n = 2n+1$

.29

א) פתרון הנוסחה הראשונה הוא $(n \ge 0)$ $a_n = \alpha \cdot 2^n - 7$, ופתרון הנוסחה השניה הוא $(n \ge 0)$ $a_n = \beta \cdot (-c)^n + \frac{3}{1+c/2} \cdot 2^n$. פתרון משותף אפשרי רק עבור $c = -1$.

ב) $(n \ge 0)$ $a_n = 6 \cdot 2^n - 7$, ובפרט: $a_0 = -1$, $a_1 = 5$.