

תרגיל 6 : נוסחאות נסיגה

1. פתור את נוסחאות הנסיגה ההומוגניות הבאות :

(א)

$$F_n - 4F_{n-1} + F_{n-2} + 6F_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

$$F_0 = 1, F_1 = 6, F_2 = 12$$

(ב)

$$F_n - 5F_{n-1} + 3F_{n-2} + 9F_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

$$F_0 = 0, F_1 = -1, F_2 = 10$$

2. פתור את נוסחאות הנסיגה הלא-הומוגניות הבאות :

(א)

$$F_n - 2F_{n-1} - 3F_{n-2} = -3 \cdot 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$F_0 = 1, F_1 = 6$$

(ב)

$$F_n - 2F_{n-1} - 3F_{n-2} = 4 \cdot 3^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$F_0 = 0, F_1 = -1$$

3. פתור את נוסחאות הנסיגה הבאות (ללא תנאי התחלה) :

(א)

$$F_n - 3F_{n-1} - 4F_{n-2} = 5^n \quad (n \geq 2)$$

(ב)

$$F_n - 3F_{n-1} - 4F_{n-2} = (-1)^n \quad (n \geq 2)$$

(ג)

$$F_n - 3F_{n-1} - 4F_{n-2} = (-10n + 2) \cdot 4^n + 5 \quad (n \geq 2)$$

4. פתור את נוסחאות הנסיגה הבאות :

(א)

$$F_n + F_{n-1} + \dots + F_0 = 3^n \quad (n \geq 0)$$

(ב)

$$F_n + 2F_{n-1} + 3F_{n-2} + \dots + (n+1)F_0 = 3^n \quad (n \geq 0)$$

(ג)

$$F_n = \sum_{i=1}^{n-1} F_i F_{n-i} \quad (n \geq 2)$$

$$F_1 = 1$$

תרגיל 6 : נוסחאות נסיגה (שאלות מתוך בחינות)

5. (תשנ"ג א) מצא את הסדרה (a_n) המקיימת את נוסחת הנסיגה

$$a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

6. (תשנ"ג ב) מצא את האיבר הכללי (a_n) של סדרה המקיימת

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} + 4n \quad (n \geq 2)$$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -1.$$

7. (תשנ"ג ב) מעבירים n ישרים במישור כך שכל שניים נחתכים, אך אף שלושה אינם נפגשים בנקודה אחת. לכמה קטעים מתחלקים הישרים הללו על-ידי נקודות החיתוך? פתור בשתי דרכים.

8. (תשנ"ד א) מצא נוסחה מפורשת עבור הסדרה (a_n) המקיימת

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$$

9. (תשנ"ה א) רשום פתרון כללי לנוסחת הנסיגה

$$a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n + (-2)^n \quad (n \geq 2)$$

ומצא את הפתרון הפרטי המקיים את תנאי ההתחלה

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

10. (תשנ"ה א) נתונה נוסחת הנסיגה

$$c_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n c_k c_{n-k} \quad (n \geq 3)$$

עם תנאי ההתחלה

$$c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = 1.$$

(א) חשב את c_3, c_4, c_5, c_6 .

(ב) מצא את הפונקציה היוצרת של הסדרה c_n .

(ג) רשום נוסחה מפורשת לאברי הסדרה.

11. (תשנ"ה ב) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = n + 1 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = a_1 = 0.$$

12. (תשנ"ה ב) נתונה נוסחת הנסיגה

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^n 2^k c_{n-k} \quad (n \geq 0)$$

עם תנאי ההתחלה

$$c_0 = 1.$$

(א) חשב את c_3, c_2, c_1 .(ב) מצא את הפונקציה היוצרת של הסדרה c_n .(ג) רשום נוסחה מפורשת עבור c_n .

13. (תשנ"א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = n - 4 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = -1, \quad a_1 = 1.$$

14. (תשנ"א) יהי t_n מספר הדרכים לכסות לוח מלבני בגודל $3 \times n$ על-ידי מרצפות בגודל 3×1 או 1×3 .(א) מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור t_n .(ב) רשום את הפונקציה היוצרת של הסדרה (t_n) .(ג) הוכח כי $t_n \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ (לכל $n \geq 1$).15. (תשנ"ב) מעבירים במישור n ישרים כך שכל שניים נחתכים, אך אף שלושה אינם נפגשים בנקודה אחת. מצא לכמה תחומים מחלקים הישרים את המישור.

16. (תשנ"ב) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 2a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^n = 0 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 2, \quad a_1 = -2.$$

17. (תשנ"ח א)

(א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$F_n - 3F_{n-1} + 2F_{n-2} = 2 \cdot 3^n \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 10$$

(ב) רשום נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית (עם מקדמים קבועים, אבל לא בהכרח מסדר 2) שהסדרה (F_n) מסעיף אי' פותרת אותה. הסבר את שיקולידך!

18. (תשנ"ח א)

(א) מצא פתרון לנוסחת הנסיגה

$$F_n - 3F_{n-2} + 2F_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

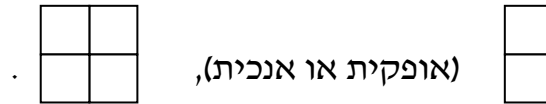
המקיים את תנאי ההתחלה (החלקיים)

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 2$$

ויש לו גידול פולינומיאלי.

(ב) מצא פתרון לנוסחת הנסיגה הנ"ל (ללא תנאי התחלה נתונים) שהוא מעריכי טהור (ללא מחוברים פולינומיאליים).

19. (תשנ"ח ב) יהי A_n מספר הדרכים לכסות לוח משובץ בגודל $2 \times n$ ע"י אבנים מהצורה:



(א) בדוק כי $A_1 = 1$, $A_2 = 3$ ורשום גם את ערכו של A_3 .

(ב) רשום נוסחת נסיגה עבור A_n . (נמק!)

(ג) פתור את נוסחת הנסיגה וקבל ביטוי מפורש עבור A_n ; השווה לתוצאות סעיף א'.

20. (תשנ"ח ב)

(א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$F_n + 4F_{n-1} + 4F_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 2$$

בדוק את תשובתך!

(ב) עבור הסדרה (F_n) שמצאת בסעיף א' הגדר עתה:

$$G_n := F_{2n} \quad (n \geq 0)$$

רשום נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית (עם מקדמים קבועים) עבור G_n ;

הסבר את שיקוליך!

21. (תשנ"ט א)

(א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 8 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = a_1 = 1$$

(ב) רשום נוסחת נסיגה לינארית הומוגנית (לאו דווקא מסדר 2), עם תנאי התחלה, שיש לה בדיוק אותו פתרון כמו לנוסחה בסעיף א' לעיל.

22. (תשנ"ט ב)

(א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2a_{n-3} = 0 \quad (n \geq 3)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 6$$

(ב) רשום נוסחת נסיגה לינארית (לא הומוגנית) מסדר 2, עם אגף ימין קבוע (לא תלוי ב- n), שיש לה בדיוק אותו פתרון כמו לנוסחה בסעיף א' לעיל.

23. (תש"ס א)

א) פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 3 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2$$

בדוק את תשובתך!

ב) הוכח שאם (a_n) הוא פתרון של נוסחת הנסיגה הנ"ל המקיים: a_1, a_0 שלמים, אז a_n הוא שלם לכל $n \geq 0$.

ג) תן דוגמא של פתרון (a_n) לנוסחת הנסיגה הנ"ל המקיים: a_n הוא שלם לכל $n \geq 1$, אך a_0 אינו שלם.

24. (תש"ס ב)


א) מצא את כל הפתרונות של נוסחת הנסיגה

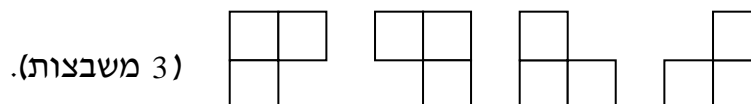
$$a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 9 \quad (n \geq 2)$$

המקיימים: $|a_n| = O(2^n)$.

ב) מצא את כל הפתרונות של נוסחת הנסיגה הנ"ל המקיימים: $a_0 = 1$.

25. (תש"ס ב) יהי d_n מספר הדרכים לכסות לוח משובץ בגודל $2 \times n$ ע"י אבנים (מרצפות) מהצורה:

(משבצת אחת), או 



א) חשב את: d_3, d_2, d_1 .

ב) הוכח שלכל $n \geq 3$:

$$d_n = d_{n-1} + 4d_{n-2} + 2d_{n-3}$$

כאשר מגדירים $d_0 := 1$.

ג) מצא נוסחה מפורשת עבור d_n . בדוק את תשובתך!

26. (תשס"א א)

פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 6a_{n-1} + 8a_{n-2} = 3^n \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3$$

בדוק את תשובתך!

27. (תשס"א ב)

פתור את נוסחת הנסיגה

$$a_n - 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 5 \quad (n \geq 2)$$

עם תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3$$

בדוק את תשובתך!

28. (תשס"ב א)

א) עבור איזה ערך של הפרמטר c יש לנוסחת הנסיגה הבאה פתרון a_n שהוא פולינום ב- n (שאינו קבוע)?

$$a_n + ca_{n-1} + a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

ב) מצא פתרון כזה המקיים את תנאי ההתחלה

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3$$

29. (תשס"ב ב)

א) עבור איזה ערך של הפרמטר c יש לשתי נוסחאות הנסיגה הבאות פתרון משותף? נמק את תשובתך.

$$a_n - 2a_{n-1} = 7 \quad (n \geq 1)$$

$$a_n + ca_{n-1} = 3 \cdot 2^n \quad (n \geq 1)$$

ב) מצא את הפתרון המשותף הנ"ל, ובפרט מצא את a_1, a_0 . בדוק את תשובתך!