

תרגיל 5 : פונקציות יוצרות (תשובות לשאלות מתוך בחינות)

1. $\frac{1}{2}(3^{102} + 1) - 2^{102}$
2. מקדם $x^n/n!$ בפונקציה היוצרת המעריכית $[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})]^3$ הוא $\frac{1}{8}[3^n - 3 \cdot 1^n + 3 \cdot (-1)^n - (-3)^n]$, ז"א: $\frac{1}{4}(3^n - 3)$ אם n אי-זוגי, 0 אם n זוגי.
3. מקדם x^{20} בפולינום $(x + x^2 + \dots + x^6)^{10} = x^{10}(1 - x^6)^{10}(1 - x)^{-10}$ הוא $\binom{19}{10} - 10 \cdot \binom{13}{4} \cdot 6^{10}$. יש לחלק ב- 6^{10} .
4. מקדם x^n בשוויון $(1 - 4x)^{-1/2} \cdot (1 - 4x)^{-1/2} = (1 - 4x)^{-1}$.
5.
 - א) $(1 + x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \cdot (-x)^k$
 - ב) מקדם x^n בשוויון $(1 + x)^n (1 + x)^{-n} = 1$.
6.
 - א) $\binom{n+7}{8}$
 - ב) $\binom{n+15}{16} - n \cdot \binom{n+5}{6}$
7. חישוב מקדם x^{2m} בשני אגפי השוויון $(1 - x)^n (1 + x)^n = (1 - x^2)^n$.
8. הצבת $x = 2$ ב- $(1 + x)^{2n} + (1 - x)^{2n}$.
9. $(2n + 1) \cdot 2^n$
10. $\frac{1}{2}(3^n - 1)$
11. הפונקציה היא $(1 - 2x)^{-5}$ והמקדם הוא $\binom{n+4}{4} \cdot 2^n$.
12. הפונקציה היא $(1 - x)^{-20}$ והמקדם הוא $\binom{n+19}{19}$.
13. פיתוח $(1 - x)^{-k}$ עבור $x = 1/2$.
14.
 - א) $f(x) = \sqrt{1 - 2x} - (1 - x)$
 - ב) $f_1 = 0, f_n = \frac{-1}{n \cdot 2^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1} (n \geq 2)$
15. $\binom{109}{10} - 100 \cdot \binom{105}{6} + \binom{100}{2} \cdot \binom{101}{2}$
16. $a_2 = 28, a_1 = 5$ (ספרה אי-זוגית אחת), בפרט: $a_n = \frac{1}{8}(8^n + 3 \cdot 6^n + 3 \cdot 4^n + 2^n)$ (שתי ספרות אי-זוגיות, או ספרה 2, 4 או 6 המופיעה פעמיים).
17. $b(x) = \frac{1 - 6x^2}{1 - x - 6x^2} = 1 + \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} (3^n - (-2)^n) x^n = 1 + x + x^2 + 7x^3 + \dots$