

תרגיל 5 : פונקציות יוצרות (שאלות מתוך בחינות)

1. (תשנ"ג א) נתון כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}$$

מצא את a_{100} .2. (תשנ"ג א) בכמה מספרים עשרוניים בעלי n ספרות מופיעות רק הספרות 1, 2, 3, כל אחת מספר אי-זוגי של פעמים?

3. (תשנ"ג ב) [שייך גם לתרגיל 3: תמורות וצירופים] מטילים קוביה 10 פעמים בזו אחר זו. מה ההסתברות שסכום התוצאות הוא 20?

4. (תשנ"ד א) הוכח (בכל דרך שתרצה):

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$

5. (תשנ"ה ב)

(א) רשום את הפיתוח לטור חזקות פורמלי של $(1+x)^{-n}$ (עבור $n \geq 0$ שלם).

(ב) הוכח, בכל דרך שתרצה, כי

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n+k-1}{k} (-1)^k = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & n \geq 1 \end{cases}$$

6. (תשנ"ו א) [סעיף א' שייך גם לתרגיל 3: תמורות וצירופים]

(א) מצא כמה מספרים, בעלי n ספרות עשרוניות לכל היותר, הם בעלי סכום ספרות 8.

(ב) אותה שאלה עם סכום ספרות 16.

7. (תשנ"ז א) [שייך גם לתרגיל 4: מקדמים בינומיים] הוכח (בכל דרך שתרצה):

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{2m-k} = (-1)^m \binom{n}{m} \quad (0 \leq m \leq n)$$

8. (תשנ"ז ב) [שייך גם לתרגיל 4: מקדמים בינומיים] הוכח (בכל דרך שתרצה):

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} 2^{2k+1} = 3^{2n} + 1 \quad (n \geq 0)$$

9. (תשנ"ט א) נתון כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1+2x}{(1-2x)^2}$$

מצא נוסחה מפורשת עבור c_n .

10. (תשנ"ט ב) נתון כי

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{x}{(1-x)(1-3x)}$$

מצא נוסחה מפורשת עבור c_n .11. (תשס"א א) מצא את מקדם x^n בפונקציה היוצרת

$$(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots)^5$$

12. (תשס"א ב) מצא את מקדם x^n בפונקציה היוצרת

$$(1 + 2x + 3x^2 + \dots)^{10}$$

13. (תשס"ב א) הוכח (בכל דרך שתרצה):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} \cdot \frac{1}{2^n} = 2^k \quad (k \geq 1)$$

14. (תשס"ב ב) נתון כי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n \in \mathbf{R}[[x]]$ הוא טור חזקות פורמלי המקיים:

$$f(x)^2 + 2(1-x)f(x) + x^2 = 0$$

א) מצא נוסחה מפורשת עבור $f(x)$, אם נתון כי $f_0 = 0$.ב) מצא נוסחה מפורשת עבור f_n ($n \geq 1$).15. (תשס"ז ב) מצא את מקדם x^{10} בפיתוח של $(1+x+x^2+x^3)^{100}$.16. (תשס"ט ב) מצא את מספר המספרים השלמים בעלי n ספרות בדיוק (לפי בסיס 10) שאינם מכילים את הספרות 8,0 אבל כל ספרה זוגית אחרת (2,4,6) מופיעה מספר זוגי (אולי אפס) של פעמים; אין הגבלה על ספרות אי-זוגיות. בדוק את תשובתך עבור $n=1,2$.17. (תש"ע ב) חשב את ההפכי לכפל $b(x) = a(x)^{-1}$ של טור החזקות הפורמלי

$$a(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} 6^n x^{2n+1}.$$

בדוק את תשובתך ע"י חישוב מפורש של מקדמי x^0, \dots, x^3 במכפלה $a(x) \cdot b(x)$.