תרגיל 4 : מקדמים בינומיים ומולטינומיים (תשובות)

.5 $\frac{1}{n+1}$

.6 $\binom{m+n}{k} = \sum_{\substack{a,b\ge 0 \\ a+b=k}} \binom{m}{a}\binom{n}{b}$

.7

א) $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$. עבור $1 \le k \le p-1$: המונה מתחלק ב- p , המכנה - לא.

.8

ב) לפי חלק (א), חזקת p המחלקת את $\binom{n}{k}$ היא $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor\right)$.

אם רושמים את פעולת החיבור $k+(n-k)=n$ לפי בסיס p ומזיזים את הנקודה i מקומות שמאלה, מקבלים את הפעולה $\frac{k}{p^i}+\frac{n-k}{p^i}=\frac{n}{p^i}$. אם מחליפים כל מחובר בחלק השלם שלו, מפסידים את הנשא המועבר לעמודת היחידות (דהיינו לעמודה i בחיבור המקורי). ההפרש $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^i} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-k}{p^i} \right\rfloor$ הוא, לכן, או 1 (אם יש נשא) או 0 (אם אין נשא).

.9 נסמן : $\omega := \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = (-1+i\sqrt{3})/2$. לפי משפט הבינום,

$$(1+\omega^0)^n + (1+\omega^1)^n + (1+\omega^2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\omega^k+\omega^{2k}\right)$$

אם $\omega^k \ne 1$ (ז"א, אם k אינו מתחלק ב-3) אז $1+\omega^k+\omega^{2k} = \frac{1-\omega^{3k}}{1-\omega^k} = 0$, ואילו אם $\omega^k = 1$ אז $1+\omega^k+\omega^{2k} = 3$. לכן

$$(1+\omega^0)^n + (1+\omega^1)^n + (1+\omega^2)^n = 3\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\dots\right]$$

לא נותר אלא לחשב ולמצוא : $1+\omega^0 = 2$, $\left|1+\omega^1\right| = \left|1+\omega^2\right| = 1$.

.10 $\binom{10}{2\,3\,5}\cdot 2^3(-1)^5$

.11 $\binom{n}{n-5\,5\,0}+\binom{n}{n-4\,3\,1}+\binom{n}{n-3\,1\,2}=\binom{n}{5}+4\cdot\binom{n}{4}+3\cdot\binom{n}{3}$

או לחילופין (בשיטות של פונקציות יוצרות) : $\binom{n+4}{5} - n\cdot\binom{n+1}{2}$

<u>תרגיל 4: פתרונות לשאלות מתוך בחינות</u>

12.

א) אם הסדרה (a_k) לוג-קעורה אז הסדרה (a_k/a_{k-1}) יורדת חלש. נגדיר: $t:=\max\{k \mid a_k/a_{k-1}\geq 1\}$.

ב) $(1\leq k\leq n-1)$ $$\binom{n}{k}^2 \Big/ \binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} = \frac{(n-k+1)(k+1)}{k(n-k)} > 1$$

13. בוחרים תת-קבוצות $C\subseteq B\subseteq[n]$ עם $|C|=m$, בשתי דרכים.

14. בוחרים תת-קבוצות $A\subseteq[n]$, $B\subseteq\{n+1,\ldots,2n\}$ עם $|A|=k$, $|B|=n-k$. באופן שקול, בוחרים $A\cup B\subseteq[2n]$ עם $|A\cup B|=n$.

15.

א) לא, כי בחיבור $100+100=200$ לפי בסיס 7: $202_7+202_7=404_7$ אין נשא באף עמודה.

ב) בחיבור הנ"ל לפי בסיס 5: $400_5+400_5=1300_5$ יש נשא פעם אחת, ואילו בחיבור לפי בסיס 2: $1100100_2+1100100_2=11001000_2$ יש נשא שלוש פעמים. לכן המקדם הבינומי מתחלק בחזקה אחת בלבד של $10=2\cdot 5$.

16. בחיבור $a+b+c$ לפי בסיס p צריך להיות נשא לפחות בעמודה אחת.

17. $50_{10}=101_7$ וגם $100_{10}=202_7$, ולכן $\binom{100}{50}\equiv\binom{2}{1}\binom{0}{0}\binom{2}{1}\equiv 4 \pmod 7$.