תרגיל 4 : מקדמים בינומיים ומולטינומיים

1. הוכח :

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1} \qquad (0\le k\le n)$$

2. הוכח, באמצעות נוסחת סטירלינג :

$$\binom{2n}{n}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\cdot(1+o(1)) \qquad (n\to\infty)$$

3. הוכח :

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\ldots+\binom{n+t}{t}=\binom{n+t+1}{t} \qquad (n,t\ge 0)$$

4. הוכח, עבור $n\ge 2$:

$$\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}n\binom{n}{n}=0$$

5. חשב את הסכום :

$$1-\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

6. חשב את מקדם x^k בפיתוח של $(1+x)^m(1+x)^n$ בשתי דרכים שונות, והסק זהות קומבינטורית.

7.

א) הוכח : אם p ראשוני אז $\binom{p}{k}$ מתחלק ב- p לכל $1\le k\le p-1$.

ב) הסק : $(a+b)^p\equiv a^p+b^p \pmod p$ לכל a, b שלמים.

8.

א) הוכח : החזקה המירבית של מספר ראשוני p המחלקת את $n!$ היא $\sum_{i=1}^{\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor$

(כאשר $\lfloor x\rfloor$ הוא החלק השלם של המספר הממשי x).

ב) הוכח : המקדם הבינומי $\binom{n}{k}$ מתחלק במספר הראשוני p אם ורק אם בביצוע החיבור $k+(n-k)=n$, כשהמספרים k, $n-k$ ו- n רשומים בבסיס p, קיימת לפחות פעם אחת העברה (נשא, carry) של 1 מעמודה לעמודה.

9. הוכח כי

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{3}+\binom{n}{6}+\ldots=\frac{1}{3}\cdot 2^n+O(1)$$

10. מצא את מקדם $a^2b^3c^5$ בפיתוח של $(a+2b-c)^{10}$.

11. חשב את מקדם x^5 בפיתוח של $(1+x+x^2)^n$.

<u>תרגיל 4: שאלות מתוך בחינות</u>

12. **(תשנ״ד מ״א)**

א) הוכח שאם $(a_0,\ldots,a_n)$ היא סדרה <u>לוג-קעורה</u> של מספרים חיוביים (ז״א: $a_k^2\ge a_{k-1}a_{k+1}$ לכל k) אז היא <u>אונימודלית</u> (ז״א: קיים אינדקס t שעבורו $a_0\le a_1\le\ldots\le a_t\ge\ldots\ge a_n$).

ב) הוכח שלכל $n\ge 0$ סדרת המקדמים הבינומיים $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\ldots,\binom{n}{n}$ היא לוג-קעורה.

13. **(תש״ס מ״א)** הוכח (בכל דרך שתרצה) שאם $0\le m\le n$ אז

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}=\binom{n}{m}\cdot 2^{n-m}$$

14. **(תש״ס מ״ב)** הוכח (בכל דרך שתרצה):

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

15. **(תשס״ב מ״א)**

א) האם המקדם הבינומי $\binom{200}{100}$ מתחלק ב- 7? נמק.

ב) באיזו חזקה של 10 מתחלק המקדם הבינומי $\binom{200}{100}$? הסבר את חישוביך.

16. **(תשס״ב מ״ב)** נסחו והוכיחו תנאי קל לבדיקה לכך שהמקדם המולטינומי $\binom{a+b+c}{a\quad b\quad c}$ יתחלק במספר ראשוני נתון p.

17. **(תשע״ב מ״א)** מצאו את השארית בחלוקה ב- 7 של המקדם הבינומי $\binom{100}{50}$.

18. **(תשע״ב ס״ב מ״ב)** הוכיחו כי $\binom{3n}{n}=\left(\frac{27}{4}\right)^n\cdot O\left(n^{-1/2}\right)$.