תרגיל 4ב: מספרי קטלאן ומספרי סטירלינג (פתרונות)

.1

א) $\binom{12}{6}$

ב) $\binom{12}{5}-\binom{12}{6}=\binom{5+7}{5}-\binom{6+6}{6}$, על-ידי שיקוף של נקודת הסיום $B(6,6)\leftrightarrow B'(5,7)$ באלכסון המקווקו. לחילופין, אפשר לעבור לנקודת התחלה $(-1,0)$ ולקבל מספר קטלאן $\frac{1}{7}\binom{12}{6}$.

.2 $\binom{40}{10}-\binom{40}{20}$

.3 נמספר את הנקודות $1,\ldots,2n$ לאורך המעגל. נקודה מס' 1 חייבת להתחבר לנקודה בעלת מספר זוגי $2k$ $(1\le k\le n)$. עיון קצר מראה שמספר האפשרויות T_n מקיים את נוסחת הרקורסיה $(n\ge 1)$ $T_n=\sum_{k=1}^{n}T_{k-1}T_{n-k}$ ואת תנאי ההתחלה $T_0=1$ של מספרי קטלאן.

.4 מתקבלים בדיוק הילוכי השריג מ-$(0,0)$ ל-(n,n) הנמצאים מתחת ל- (או נוגעים ב-) ישר $y=x$.

.5 אם n הוא המספר האחרון בתמורה אז אין צורך להכניסו למחסנית, והתמורה של $1,\ldots,n-1$ שלפניו ניתנת לסידור על-ידי מחסנית (ולהיפך). בכל מקרה אחר n חייב להיכנס למחסנית, שבהכרח ריקה לפני כן. אם יש לפניו $k-1$ מספרים $(1\le k\le n-1)$ אז הם בהכרח הקטנים ביותר $(1,\ldots,k-1)$, ומהווים תמורה הניתנת לסידור על-ידי מחסנית. כנ"ל לגבי המספרים שאחריו, ומקבלים שמספר התמורות מקיים את הרקורסיה ואת תנאי ההתחלה של מספרי קטלאן.

.6 בהינתן חלוקה של הקבוצה $[n]$ ל-k בלוקים זרים ולא ריקים, נתבונן בבלוק המכיל את המספר n. או שבלוק זה אינו מכיל אברים נוספים, ואז השמטת המספר n תתן חלוקה של $[n-1]$ ל-$k-1$ בלוקים לא ריקים; או שבלוק זה מכיל אברים נוספים, ואז השמטת n תתן חלוקה של $[n-1]$ ל-k בלוקים לא ריקים. במקרה הראשון ניתן לשחזר את החלוקה של $[n]$ באופן יחיד מתוך חלוקת $[n-1]$, ואילו במקרה השני ישנן k אפשרויות לשחזור. עבור המקרים הגבוליים $k=1$, $k=n$ (וכן $n=1$) יש לבדוק בנפרד.

.7

א) כל פונקציה כזאת מוגדרת באופן יחיד על-ידי סדרת המקורות ("תמונות הפוכות") $f^{-1}(1),\ldots,f^{-1}(k)$. זוהי סדרה של קבוצות זרות ולא ריקות

שאיחודן הוא $[n]$. ההבדל בין מצב זה לבין הגדרת מספרי סטירלינג הוא שכאן יש חשיבות לסדר הבלוקים, ולכן מספר האפשרויות הוא $k!S(n,k)$.

ב) המספר הכללי של פונקציות $f:[n]\to[m]$ הוא m^n. מצד שני, התמונה $f([n])$ של פונקציה כזאת היא תת-קבוצה לא ריקה של $[m]$, נאמר בגודל $1\le k\le n$. כמובן, הפונקציה היא <u>על</u> התמונה שלה. מספר תת-הקבוצות בגודל k של $[m]$ הוא $\binom{m}{k}$, ויש להכפיל מספר זה בתוצאת סעיף א' לעיל ולסכם על $1\le k\le n$.

ג) שני האגפים הם פולינומים במשתנה x, ממעלה n לכל היותר, וכך גם ההפרש ביניהם. הפרש זה, לפי סעיף ב', מתאפס עבור כל ההצבות $x=1,2,\ldots$. פולינום בעל אינסוף שורשים ממשיים הוא פולינום האפס, ולכן שני האגפים שווים (כפולינומים ב-x).

8. מכיוון ש-$s(n,k)=(-1)^{n-k}c(n,k)$, מספיק להוכיח שמתקיים, עבור מספרי סטירלינג מסוג ראשון ללא סימן: $c(n,k)=c(n-1,k-1)+(n-1)\cdot c(n-1,k)$.
בהינתן תמורה על $[n]$ בעלת k מחזורים, נתבונן במחזור המכיל את המספר n. או שמחזור זה אינו מכיל אברים נוספים, ואז השמטת המספר n תתן תמורה של $[n-1]$ בעלת $k-1$ מחזורים; או שמחזור זה מכיל אברים נוספים, ואז השמטת המספר n תתן תמורה של $[n-1]$ בעלת k מחזורים. במקרה הראשון ניתן לשחזר את התמורה של $[n]$ באופן יחיד מתוך התמורה של $[n-1]$, ואילו במקרה השני ישנן $n-1$ אפשרויות לשחזור (כי את המספר n אפשר להכניס אחרי כל אחד מהמספרים הקיימים). עבור המקרים הגבוליים $k=1$, $k=n$ (וכן $n=1$) יש לבדוק בנפרד. להוכחות נוספות עיין:
R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics, Vol. 1 (1986), p. 19.

9. אפשר להוכיח באינדוקציה על n, בעזרת שאלה 6.

10. אפשר להוכיח בעזרת שאלות 5ג ו-7 לעיל, המאפשרות לפרש את מספרי סטירלינג (משני הסוגים) כמטריצות מעבר (בשני הכיוונים) בין שני בסיסים של מרחב הפולינומים במשתנה אחד x.

11.

א) ישירות מהגדרת מספרי בל ומספרי סטירלינג מסוג ראשון.

ב) בחלוקה של $\{1,\ldots,n+1\}$ לבלוקים, יהי $0\le k\le n$ מספר האיברים <u>שאינם</u> נמצאים באותו בלוק כמו האיבר $n+1$. יש $\binom{n}{k}$ דרכים לבחור אותם ו-$B(k)$ דרכים לחלק אותם לבלוקים.

ג) נפתח את אגף ימין (עם m במקום k) בעזרת הנוסחה משאלה 5ג:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{n}S(n,k)(m)_k=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(m-k)!}S(n,k)$$

הסכום הפנימי הוא בעצם על $0\le k\le \min(m,n)$, אחרת $(m)_k=0$. אם נסמן $t:=m-k$ ונסכם על זוג הפרמטרים האי-שליליים (t,k) במקום על (m,k), נקבל לפי סעיף 9א':

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^n}{m!}=\sum_{t=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{t!}S(n,k)=\left(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}S(n,k)\right)=e\cdot B(n)$$

כדרוש.