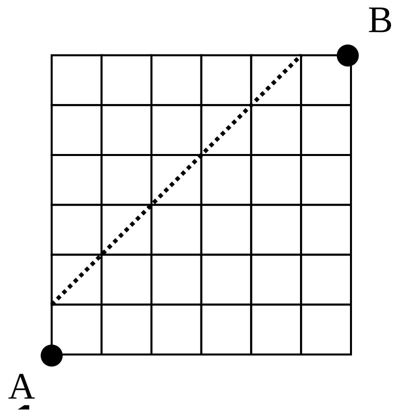
תרגיל 4ב: מספרי קטלאן ומספרי סטירלינג

1. **(תשס"א מ"א)**
א) מהו מספר הדרכים להגיע מהנקודה A לנקודה B על-ידי הילוך שריג בריבוע המצוייר, כאשר בכל שלב מותר לצעוד צעד אחד (צלע של משבצת) ימינה, או צעד אחד למעלה?



ב) מהו מספר ההילוכים הנ"ל שאינם נוגעים באלכסון המקווקו? נמק!

2. **(תשע"א מ"א)** מה מספר הדרכים להגיע מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(20,20)$ בהילוך שריג, עם צעדים למעלה וימינה בלבד, כך שההילוך לא ייגע בישר $y=x+10$?

3. נתונות $2n$ נקודות על היקף מעגל. הוכח שמספר הדרכים לחבר אותן על-ידי n מיתרים לא נחתכים הוא מספר קטלאן C_n.

4. הראה שמספר הטבלאות (מטריצות) בגודל $2\times n$ שבהן רשומים המספרים $1,\dots,2n$ (כל אחד פעם אחת) כך שכל השורות והעמודות עולות (משמאל לימין ומלמעלה למטה, בהתאמה) – הוא מספר קטלאן C_n. למשל, עבור $n=3$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&4\\3&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&5\\3&4&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&3&4\\2&5&6\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix}$$

<u>רמז:</u> התאם לכל טבלה כזאת הילוך שריג המתחיל ב-$(0,0)$, שבו צעד מס' i $(1\le i\le 2n)$ הוא ימינה (למעלה) אם המספר i מופיע בשורה הראשונה (השניה, בהתאמה) בטבלה. אילו הילוכים מתקבלים כך?

5. הוכח שמספר התמורות של המספרים $1,\dots,n$ הניתנות לסידור בסדר עולה בעזרת <u>מחסנית אחת</u> הוא מספר קטלאן C_n. למשל, עבור $n=3$ התמורות הן: 321 312 213 132 123 (אך לא 231). דוגמא לסידור התמורה 213:

$$\leftarrow \lfloor 2 \rfloor \leftarrow 13 \qquad \leftarrow \left\lfloor \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rfloor \leftarrow 3 \leftarrow \lfloor \;\; \rfloor \leftarrow 213$$

$$12 \leftarrow \lfloor \;\; \rfloor \leftarrow 3 \qquad 123 \leftarrow \lfloor \;\; \rfloor \leftarrow 1 \leftarrow \lfloor 2 \rfloor \leftarrow 3$$

<u>רמז</u>: הראה שמספר התמורות הנ"ל מקיים את הרקורסיה ואת תנאי ההתחלה של מספרי קטלאן.

6. הוכח את נוסחת הרקורסיה למספרי סטירלינג מסוג שני:

$$S(n,k)=S(n-1,k-1)+k\cdot S(n-1,k) \quad (1\le k\le n)$$

עם תנאי ההתחלה

$$S(0,0)=1, \quad S(n,0)=S(n-1,n)=0 \quad (n\ge 1)$$

7.

א) הוכח שמספר הפונקציות $f:[n]\to[k]$ שהן <u>על</u> הוא: $k!S(n,k)$.

ב) הסק שלכל m, n טבעיים:
$$m^n=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(m)_k$$

כאשר $(x)_k := x(x-1)\cdots(x-k+1)$.

ג) הסק, לכל n טבעי, את שוויון הפולינומים
$$x^n=\sum_{k=1}^{n}S(n,k)(x)_k$$

8. הוכח את נוסחת הרקורסיה למספרי סטירלינג מסוג ראשון:

$$s(n,k)=s(n-1,k-1)-(n-1)\cdot s(n-1,k) \quad (1\le k\le n)$$

עם תנאי ההתחלה

$$s(0,0)=1, \quad s(n,0)=s(n-1,n)=0 \quad (n\ge 1)$$

תוכל להיעזר בהגדרה הקומבינטורית של מספרי סטירלינג ללא סימן, $c(n,k)$.

9. הוכח בכל דרך שתרצה:

$$(x)_n=\sum_{k=1}^{n}s(n,k)x^k$$

10. הוכח בכל דרך שתרצה:

$$\sum_m S(n,m)s(m,k)=\delta_{n,k}$$
$$\sum_m s(n,m)S(m,k)=\delta_{n,k}$$

כאשר

$$\delta_{n,k} := \begin{cases} 1, & \text{if } n=k; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

11. מספר בל (Bell) $B(n)$ הוא מספר החלוקות של קבוצה בגודל n לבלוקים זרים ולא ריקים, שמספרם לא נקבע מראש. מגדירים: $B(0) := 1$.

א) הוכח:

$$B(n) := \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \qquad (n \geq 0)$$

ב) הוכח:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k) \qquad (n \geq 0)$$

ג) הוכח:

$$B(n) = \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \qquad (n \geq 0)$$

כאשר $0^0 := 1$.