תרגיל 4א: מקדמים q-בינומיים (פתרונות)

1. ראשית, שתי הנוסחאות מתקבלות זו מזו ע"י הצבת $n-k$ במקום k. נוכיח, למשל, את נוסחה א'. נוסחה זו אפשר אמנם להוכיח בעזרת הנוסחה המפורשת למקדמים q-בינומיים, אבל נביא כאן הוכחה קומבינטורית בעזרת הילוכי שריג:

מקדם q^t ב- $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ הוא מספר הילוכי השריג $(0,0) \to (k, n-k)$ שהשטח מתחתם הוא בדיוק t. בהילוך כזה, נקודת השריג שלפני $(k, n-k)$ היא אחת משתים:

<u>או</u> הנקודה $(k-1, n-k)$, ואז הצעד האחרון הוא ימינה, השטח מתחתיו הוא $n-k$, והתרומה למקדם הבינומי מצעדים כאלו היא $q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q$;

<u>או</u> הנקודה $(k, n-k-1)$, ואז הצעד האחרון הוא למעלה, השטח מתחתיו הוא אפס, והתרומה מצעדים כאלו היא $q^0\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$.

2.

א) הוקטור הראשון v_1 צריך לקיים רק: $v_1 \neq 0$. לכן יש $q^n - 1$ אפשרויות לבחור אותו.

הוקטור השני v_2 צריך לקיים: $v_2 \notin span(v_1)$. יש $q^n - q$ אפשרויות לבחור אותו, כי $span(v_1)$ הוא מרחב וקטורי חד-ממדי ולכן יש בו $q^1 = q$ וקטורים.

הוקטור השלישי v_3 צריך לקיים: $v_3 \notin span(v_1, v_2)$. יש $q^n - q^2$ אפשרויות לבחור אותו, כי $span(v_1, v_2)$ הוא דו-ממדי.

נמשיך כך ונקבל את מספר הסדרות המבוקש $\prod_{j=1}^{k}\left(q^n - q^{j-1}\right)$.

ב) כאן $n = k$, ולכן

$$\prod_{j=1}^{k}\left(q^k - q^{j-1}\right) = q^{\binom{k}{2}}\prod_{j=1}^{k}\left(q^{k-j+1} - 1\right) = q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k\prod_{j=1}^{k}\frac{q^{k-j+1}-1}{q-1} =$$

$$= q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k\prod_{j=1}^{k}[k-j+1]_q = q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k[k]_q!$$

ג) כל סדרה כמו בסעיף א' היא בסיס סדור לתת-מרחב k-ממדי של V. כל תת-מרחב k-ממדי מתקבל ממספר סדרות כאלו, כמספר בסיסיו הסדורים (ראה סעיף ב'). לכן מספר התת-מרחבים ה-k-ממדיים של V הוא המנה:

$$\frac{\prod_{j=1}^{k}\left(q^n - q^{j-1}\right)}{\prod_{j=1}^{k}\left(q^k - q^{j-1}\right)} = \frac{\prod_{j=1}^{k}\left(q^{n-j+1} - 1\right)}{\prod_{j=1}^{k}\left(q^{k-j+1} - 1\right)} = \frac{\prod_{j=1}^{k}[n-j+1]_q}{\prod_{j=1}^{k}[k-j+1]_q} =$$

$$= \frac{[n]_q[n-1]_q\cdots[n-k+1]_q}{[k]_q[k-1]_q\cdots[1]_q} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$$

פתרונות לשאלות מתוך בחינות

3.

א) ראשית, עבור q שלם, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ הוא גם כן מספר שלם כי הוא פולינום ב- q עם מקדמים שלמים. עבור q זוגי, $[k]_q = 1+q+\ldots+q^{k-1}$ הוא אי-זוגי לכל $k \geq 1$.
לכן כך גם $[k]_q!$ וגם $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$ (לכל $0 \leq k \leq n$).

ב) כאן דרושה זהירות בהסבר, כי מנה של מספרים זוגיים יכולה להיות זוגית או אי-זוגית. נשתמש, אם כן, בהגדרה

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_t c_t(k,n-k)q^t$$

כאשר $c_t(k,n-k)$ הם שלמים. לכן, אם $q \equiv 1 \pmod 2$, אז

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \equiv \sum_t c_t(k,n-k)1^t \pmod 2$$

ואגף ימין הוא בדיוק $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ עבור $q=1$, ז"א: $\binom{n}{k}$.

4. ראה שאלה 1א לעיל.

5. ראה שאלה 2 לעיל.

6. ראה שאלה 1 לעיל.