תרגיל 4א: מקדמים q-בינומיים

1. הוכח את זוג נוסחאות הנסיגה (עבור $1 \le k \le n-1$):

א) $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

ב) $$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^{k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

2. יהי F_q שדה סופי בעל q איברים (כאן q אינו פרמטר מופשט אלא מספר טבעי, ובעצם חזקת ראשוני). יהי V מרחב וקטורי n-ממדי מעל F_q. נראה (בשלבים) כי מספר התת-מרחבים ה-k-ממדיים של V הוא בדיוק המקדם ה-q-בינומי $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ (לכל $0 \le k \le n$):

א) הוכח שמספר הסדרות באורך k של וקטורים בלתי תלויים ליניארית ב-V הוא: $\prod_{j=1}^{k}\left(q^n - q^{j-1}\right)$. (רמז: בחר את הוקטורים מתוך V בזה אחר זה, תוך שמירת אי–תלות ליניארית.)

ב) בפרט, הוכח שמספר הבסיסים הסדורים של מרחב k-ממדי מעל F_q הוא $\prod_{j=1}^{k}\left(q^k - q^{j-1}\right) = q^{\binom{k}{2}}(q-1)^k[k]_q!$.
(תזכורת: $[0]_q! = 1$; ועבור k טבעי: $[k]_q! = [1]_q \cdot [2]_q \cdot \ldots \cdot [k]_q$, כאשר $[k]_q = \dfrac{1-q^k}{1-q} = 1 + q + \ldots + q^{k-1}$.)

ג) הסק שמספר התת-מרחבים ה-k-ממדיים של מרחב n-ממדי הוא $\dfrac{\prod_{j=1}^{k}\left(q^n - q^{j-1}\right)}{\prod_{j=1}^{k}\left(q^k - q^{j-1}\right)} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

<u>שאלות מתוך בחינות</u>

3. **(תשנ"ג א)**

א) הוכח שהמקדם ה-q-בינומי $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, עבור q שלם זוגי, הוא מספר שלם אי-זוגי.

ב) הוכח שאם q שלם אי-זוגי אז $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ הוא בעל אותה זוגיות כמו המקדם הבינומי הרגיל $\binom{n}{k}$.

4. **(תשנ"ג ב)** תן הוכחה קומבינטורית לנוסחת הנסיגה עבור מקדמים q-בינומיים:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \cdot q^{n-k}$$

5. **(תשנ"ו א)**

א) יהי V מרחב וקטורי n-ממדי מעל שדה F_q בעל q אברים. הוכח שמספר הסדרות (v_1, v_2, v_3) של שלושה וקטורים בלתי תלויים ליניארית מתוך V הוא $(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)$.

ב) הוכח את הנוסחה המפורשת למקדם ה-q-בינומי:

$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)}{(q^3-1)(q^3-q)(q^3-q^2)}$$

6. **(תשס"א ב)**

א) הוכח באמצעות הילוכי שריג את הזהות

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \qquad (1 \le k \le n-1)$$

ב) הוכח, עבור מקדמים q-בינומיים, את אחת הזהויות (לבחירתך):

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \qquad (1 \le k \le n-1)$$

או

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q \qquad (1 \le k \le n-1)$$