

## תרגיל 3 : תמורות וצירופים

1. כמה מחלקים שונים יש למספר 600 ?
2. מהי החזקה הגדולה ביותר של 10 המחלקת את 50! ?
3. כמה קבוצות של 3 מספרים מתוך  $\{1,2,\dots,20\}$  אינן מכילות שני מספרים עוקבים?
4. בכיתה יש שתי שורות, ובכל שורה 8 כסאות. מבין 14 הסטודנטים המשתתפים בשיעור יש 5 שתמיד יושבים בשורה הראשונה, 4 אחרים תמיד יושבים בשורה השנייה והשאר יכולים לשבת בכל אחת מהשורות. בכמה דרכים יכולים כל הסטודנטים לשבת בכיתה?
5. עיין בדף המצורף מתוך הספר "שרי המאה", והוכח שמש' הדרכים לקרוא את הפתגם הוא באמת 45760.
6. כמה סדרות  $(a_1, \dots, a_k)$  של  $k$  מספרים מתוך  $[n]$  מקיימות:  $(\forall i) a_{i+1} \geq a_i + 4$  ?
7. מצא את מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$  כאשר:
  - א) שלמים אי-שליליים.
  - ב) שלמים המקיימים:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 3$ .
  - ג) שלמים,  $x_i \leq 20$  (לא בהכרח אי-שליליים).
8. כמה מספרים בין 1000 ל-10000, סכום הספרות שלהם הוא 8 ?

**"עם ישראל חי לעולמי עד" (הקמיע של רבי יהונתן אייבשיץ)**

(מתוך: י"ל הכהן מימון, שרי המאה, חלק א', הוצאת מוסד הרב קוק, ירושלים, תש"ן)

- טוב – אמר ההגמון מתוך השתוממות – ועתה הגד נא לי : מה מספר בני עמך בעיר מיץ וסביבותיה ?
- חמישה וארבעים אלף שבע מאות ושישים ( 45760 ) ! – ענה הרב .
- אם כך , - ענה ההגמון – הרי הפקודה שלי : בעוד שעה אחת יצא דבר הגירוש לפעולות . והנה – אתה מפורסם ככותב קמיעות נפלא מאין כמוך ולפיכך עליך לכתוב את המאמר שהזכרת על גבי קלף שגודלו כגודל ' המזוזה' שלכם הנתונה בפתחי בתיכם – ארבעים וחמשה --- מה אמרת ? מה מספר בני עמך בגליל שלי ?
- חמישה וארבעים אלף שבע מאות ושישים ( 45760 ) – אמרתי .
- ובכן : כתוב את המאמר שלך חמישה וארבעים אלף שבע מאות ושישים ( 45760 ) פעם על קלף מזוזה במשך שעה זו – ואם זאת תעשה , אבטל את הגזירה הרעה ואתה וכל אחיך תשבו בעיר זו לבטח . קמטים נראו במצחו הרחב והלבן של הרב . והוא ענה ואמר מתוך בטחון :
- אלקי ישראל הוא כל יכל ! גם מספר אותיותיו של המאמר הזה הוא שבע עשרה : עוד שעה , ואם ירצה השם – תתמלא דרישתך .
- הלך הרב הביתה וכעבור שעה הביא אל ההגמון "קמיע" כתוב על גבי קלף מזוזה .
- נתן ההגמון עיניו ב" קמיע " , קרא ישר והפוך ולא ידע מה לפניו . ביאר לו רבי יהונתן ואמר :
- " קמיע' זה כתוב הפתגם שהזכרתי לפניך לפני שעה : " עם ישראל חי לעולמי עד" . החל מאות ע שבאמצע יכול אתה לקרוא את הפתגם הזה בחמישה וארבעים אלף שבע מאות ושישים ( 45760 ) אופנים לכל צד ! ואולם עד שתגמור את עבודת הקריאה הזאת – עליך לבטל את הגזירה קודם לכן .
- הסתכל ההגמון רגעים אחדים בקמיע המפליא – ונתן פקודה לבטל את גזירת הגירוש .
- וכך מסיימת האגדה :
- במשך שנה תמימה ישב ההגמון וקרא בקמיע וחשב ומצא כי צדק רבי יהונתן . הלך ההגמון אל הרב , לחץ את ידו וברך מתוך דחילו-ורחימו את הברכה היהודית :
- ברוך שחלק מחוכמתו ליראיו היהודים ! ...

ד	ע	י	מ	ל	ו	ע	ל	ע	ו	ל	מ	י	ע	ד
ע	י	מ	ל	ו	ע	ל	י	ל	ע	ו	ל	מ	י	ע
י	מ	ל	ו	ע	ל	י	ח	י	ל	ע	ו	ל	מ	י
מ	ל	ו	ע	ל	י	ח	ל	ח	י	ל	ע	ו	ל	מ
ל	ו	ע	ל	י	ח	ל	א	ל	ח	י	ל	ע	ו	ל
ו	ע	ל	י	ח	ל	א	ר	א	ל	ח	י	ל	ע	ו
ע	ל	י	ח	ל	א	ר	ש	ר	א	ל	ח	י	ל	ע
ל	י	ח	ל	א	ר	ש	י	ש	ר	א	ל	ח	י	ל
י	ח	ל	א	ר	ש	י	ם	י	ש	ר	א	ל	ח	י
ח	ל	א	ר	ש	י	ם	ע	ם	י	ש	ר	א	ל	ח
י	ח	ל	א	ר	ש	י	ם	י	ש	ר	א	ל	ח	י
ל	י	ח	ל	א	ר	ש	י	ש	ר	א	ל	ח	י	ל
ע	ל	י	ח	ל	א	ר	ש	ר	א	ל	ח	י	ל	ע
ו	ע	ל	י	ח	ל	א	ר	א	ל	ח	י	ל	ע	ו
ל	ו	ע	ל	י	ח	ל	א	ל	ח	י	ל	ע	ו	ל
מ	ל	ו	ע	ל	י	ח	ל	ח	י	ל	ע	ו	ל	מ
י	מ	ל	ו	ע	ל	י	ח	י	ל	ע	ו	ל	מ	י
ע	י	מ	ל	ו	ע	ל	י	ל	ע	ו	ל	מ	י	ע
ד	ע	י	מ	ל	ו	ע	ל	ע	ו	ל	מ	י	ע	ד



### תרגיל 3 : תמורות וצירופים (שאלות מתוך בחינות)

9. (תשנ"ג ב) חשב בכמה דרכים ניתן להרכיב חבילת שי לחגים בת 10 פריטים, הכוללים: שנים או שלושה בקבוקי יין; צנצנת דבש אחת; לפחות שתי חבילות עוגיות; ולפחות שתי חפיסות שוקולד (כל הפריטים מאותו סוג הם זהים).
10. (תשנ"ד א) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$  כאשר  $x_i \geq -2$  שלמים?
11. (תשנ"ה א) לכבוד מסיבת פורים החליט ועד הסטודנטים של החוג למדעי הצחוק לקנות כובעים ומסכות. בסך-הכל דרושים 150 פריטים, הכוללים: לפחות 30 כובעי ליצן, לפחות 30 כובעי קאובוי ולפחות 40 מסכות. כל הפריטים מאותו סוג הם זהים. מצא את מספר הדרכים לבצע את הקניה, בכל אחת מההנחות הבאות:  
(א) ללא הנחות נוספות.  
(ב) מספר כובעי הליצן שווה למספר כובעי הקאובוי.
12. (תשנ"ו א) [שייך גם לתרגיל 5 (פונקציות יוצרות)]  
(א) מצא כמה מספרים, בעלי  $n$  ספרות לכל היותר, הם בעלי סכום ספרות 8.  
(ב) אותה שאלה עם סכום ספרות 16.
13. (תשנ"ז ב)  
(א) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 80$  כאשר  $x_i$  מספרים שלמים זוגיים אי-שליליים?  
(ב) מהו מספר הפתרונות כאשר  $x_i$  הם מספרים אי-זוגיים חיוביים?
14. (תשנ"ח א)  
(א) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $x + y + z = 200$  כאשר  $x, y, z \geq 10$  שלמים?  
(ב) מהו מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל כאשר  $x, y, z \leq 100$  שלמים (לאו דווקא אי-שליליים)?
15. (תשנ"ח ב) מצא את מספר הסדרות  $(a_1, \dots, a_{11})$  של מספרים שלמים המקיימים:  

$$1 \leq a_1 < a_2 \leq a_3 < a_4 \leq \dots < a_{10} \leq a_{11} \leq 100$$

$$a_{2k-1} < a_{2k} \leq a_{2k+1} \quad (1 \leq k \leq 5)$$
 דהיינו (בין השאר):
16. (תשנ"ט ב) [שייך גם לתרגיל 5 (פונקציות יוצרות)] מצא את מספר הדרכים להרכיב משלוח מנות הכולל אוזני-המן, ופלים וחפיסות שוקולד כך שמספר הפריטים מכל אחד משלושת הסוגים הוא אי-זוגי, ובסך-הכל יש 15 פריטים בדיוק (כל הפריטים מאותו סוג הם זהים).
17. (תש"ס א)  
(א) מהו מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5760$  כאשר  $x_i$  הם מספרים זוגיים אי-שליליים?  
(ב) מהו מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל כאשר  $x_i$  הם מספרים אי-זוגיים חיוביים?
18. (תש"ס ב) מצא את מספר הסדרות  $(a_1, \dots, a_{10})$  של מספרים שלמים (לאו דווקא אי-שליליים) המקיימים:  

$$1 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_{10}| \leq 1000$$

19. (תשס"א א) מצא את מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 100$  כאשר  $x_i \geq 5$  הם מספרים שלמים ( $1 \leq i \leq 10$ ).
20. (תשס"א ב) מצא את מספר הסדרות  $(a_1, \dots, a_{10})$  של מספרים שלמים המקיימים:  
 $50 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{10} \geq 5$
21. (תשס"ב א) מצא את מספר הסדרות  $(a_1, \dots, a_{100})$  של מספרים שלמים זוגיים המקיימים  
 $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{100} \leq 200$
- ב) מצא את מספר הסדרות  $(a_1, \dots, a_{100})$  של מספרים שלמים אי-זוגיים המקיימים  
 $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{100} \leq 200$
22. (תשס"ב ב) מצא את מספר הפתרונות של המשוואה  $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 120$  כאשר  $x_i$  שלם חיובי לכל  $i$ .
- ב) מצא את מספר הפתרונות של המשוואה הנ"ל כאשר  $0 \leq x_i \leq 100$  (שלם) לכל  $i$ .
23. (תש"ע ס"ב מ"ב) כמה קבוצות של 4 מספרים מתוך  $\{1, \dots, 100\}$  אינן מכילות שני מספרים עוקבים?
24. (תש"ע ס"ב מ"א) כמה סדרות  $(a_1, \dots, a_{100})$  של 100 מספרים מתוך  $\{0, 1, \dots, 1000\}$  מקיימות  $a_{i+1} \leq a_i - 2$  ( $1 \leq i \leq 99$ ) ?