תרגיל 1: מהי קומבינטוריקה? (פתרונות)

1. כל אבן דומינו מכסה שתי משבצות, ולכן לוח בשטח אי-זוגי אינו ניתן לכיסוי. אם השטח זוגי אז אורך כל שורה, או אורך כל עמודה, הוא זוגי. במקרה הראשון אפשר לכסות כל שורה (ולכן את כל הלוח) באבנים אופקיות; הקרה השני דומה (אבנים אנכיות).

2.

א) הוכחה באינדוקציה על גודל הלוח:
אם בשתי השורות הראשונות לא חסרה משבצת אז אפשר לכסות אותן (ע"י אבנים אנכיות) ולעבור לאותה בעיה על לוח אי-זוגי קטן יותר. כנ"ל לגבי שתי שורות אחרונות, וכן לעמודות. נותר להתחיל את האינדוקציה מלוחות אי-זוגיים שבהם מכל צד של המשבצת החסרה יש שורה\עמודה אחת לכל היותר. בצירוף התנאי על צבע פינתי נשארות רק שתי אפשרויות: לוח 1×1 פחות משבצת (כיסוי ריק), או לוח 3×3 פחות משבצת אמצעית (קל לכיסוי).

ב) במקרה זה אין שוויון בין מספר המשבצות הנותרות מכל צבע.

3. תמיד אפשר, בתנאי שהלוח אינו מורכב משורה (או עמודה) אחת!
רעיון אפשרי להוכחה: אפשר לצייר (כיצד?) מסילה סגורה העוברת פעם אחת דרך כל משבצת בלוח. המסילה עוברת דרך משבצות שחורות ולבנות לסירוגין. השמטת שתי משבצות מצבעים שונים מנתקת את המסילה הסגורה לשתי מסילות פתוחות, כל אחת <u>באורך זוגי</u> (מדוע?). קל לראות שכל מסילה כזאת ניתנת לכיסוי ע"י אבני דומינו.

4. נחלק את הלוח לשני לוחות בגודל 3×2 . כל אחד מהם ניתן לכיסוי ב-3 אופנים, ובסך-הכל מתקבלים $3^2=9$ כיסויים שאינם "חוצים" את הקו המפריד בין שני הלוחות הקטנים. אם כיסוי מכיל אבן החוצה את הקו המפריד, אז מספר האבנים החוצות הוא <u>זוגי</u>: אבן חוצה מכסה משבצת אחת בכל צד, ואבן שאינה חוצה מכסה שתי משבצות באחד הצדדים. מספר האבנים החוצות הוא לפחות (בעצם, בדיוק) 2 וקל לראות שמתקבלים עוד שני כיסויים אפשריים. בסה"כ קבלנו: 11 כיסויים.

5. (פתרון מקוצר) נסמן ב- a_n את מספר הכיסויים של לוח בגודל $3\times n$. בעזרת סימון נוסף, של מספר הכיסויים של לוח כנ"ל פחות משבצת פינתית, ניתן לקבל נוסחאות רקורסיה המשלבות את שני הגדלים, ומתוכן לחלץ את הנוסחה $a_n-4a_{n-2}+a_{n-4}=0$. כמובן, $a_{2n+1}=0$ (לוח בשטח אי-זוגי). ניתן לפתור עבור a_{2n} (נוסחת רקורסיה מסדר שני) ולקבל

$$a_{2n}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^n-\left(1-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]\qquad (n\geq 0).$$

6. למשל: למשבצות בשפת הלוח יש רק 3 (ולא 4) אפשרויות כיסוי, ולמשבצות הפינתיות – רק 2 אפשרויות. לכן מתקבל חסם מלעיל משופר במקצת: $4^{2(m-1)(n-1)}3^{2(m+n-2)}2^2$. (האם זהו שיפור בסדר גודל?)
לגבי חסם תחתון, אפשר לחלק ללוחות בגודל 3×2 (או יותר). מה מקבלים?

.7

א) נניח שקיים כיסוי כך שכל ישר אופקי או אנכי חותך לפחות אחת מאבניו. בעזרת שיקול כמו בשאלה 4 נקבל שכל ישר כזה חותך מספר זוגי של אבני דומינו, כלומר: לפחות שתים. מספר הישרים הלל (שאינם חותכים משבצות) הוא $2\times 5=10$, ומתקבלות לפחות 20 אבנים נחתכות (כל אבן נחתכת כמובן ע"י ישר יחיד). זה בלתי אפשרי, כי בכיסוי מלא יש רק $6^2/2=18<20$ אבנים!

ב) ההוכחה הקודמת אינה עובדת כאן, כי $8^2/2=32>28=2\cdot 2\cdot 7$; ואמנם, בלוח בגודל 8×8 קיים כיסוי כזה. מצא אותו!