

בחינת סיום (מועד א') בקורס
מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)
מרצה: פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
אין להשתמש בחומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשעור או בתרגיל. נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון,
ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים. גם לטיוטות יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד,
בעמודים נפרדים שיסומנו "טיוטה".

הבהרה!

1. תהי G קבוצת המטריצות הממשיות ההפיכות מסדר $n \times n$, ותהי $M \in G$. נגדיר ב- G פעולה חדשה:

$$A * B := A \cdot M \cdot B \quad (\forall A, B \in G)$$

כאשר "·" מסמל כפל מטריצות רגיל.

(א) האם $(G, *)$ אגודה? מונואיד? חבורה? נמק.

(ב) ידוע שעבור כפל מטריצות רגיל, (G, \cdot) אינה קומוטטיבית (עבור $n \geq 2$). הוכח שעבור כל $M \in G$, גם $(G, *)$ אינה קומוטטיבית (עבור $n \geq 2$).

2. חבורה G בגודל 25 פועלת על קבוצה X בגודל 52. הוכח שיש ב- X נקודת שבת (משותפת לכל אברי G).

3.

(א) הוכח שאין פתרון במספרים שלמים x, y למשוואה

$$483x + 343y = 5$$

(ב) מצא פתרון במספרים שלמים x, y למשוואה

$$47x + 39y = 3$$

הסבר את שלבי הפתרון ובדוק את תשובתך.

4. תהי G תת-החבורה של S_4 הנוצרת על-ידי התמורות $(12)(34)$, $(13)(24)$.

(א) סמן את ארבעת אברי G באותיות, ורשום את טבלת הכפל שלה.

(ב) האם G קומוטטיבית?

(ג) נתבונן ב-3 החבורות הבאות: G ; \mathbb{Z}_4 (לגבי חיבור מודולו 4); \mathbb{Z}_8^\times (לגבי כפל מודולו 8). עבור כל שתיים מהן קבע האם הן איזומורפיות (עם נימוק מתאים).

5. מצא את ההפכי של האיבר $x^2 + x + 1$ בשדה $\mathbb{F} = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ (אין צורך להוכיח שאכן \mathbb{F} שדה).

6.

(א) בנה אוטומט סופי לא דטרמיניסטי (אפשר עם מעברי ε) המקבל את השפה

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid 1 \text{ מסתיימת ב-} w \text{ או } w \text{ אי-זוגי, אן } w \text{ מסתיימת ב-} 1\}$$

(ב) בנה אוטומט סופי דטרמיניסטי המקבל את השפה הנ"ל.

(ג) בדוק את שני האוטומטים שבנית על המילים: 1000, 1001, 0110.