בחינת סיום (מועד ב') בקורס
מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)
מרצה: פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.
<u>אין</u> להשתמש בחומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשעור או בתרגיל. נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים. גם לטיוטות יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, בעמודים נפרדים שיסומנו "טיוטה".

בהצלחה!

1. תהי $(\mathbf{Z}_n,+)$ חבורת השאריות מודולו n עם פעולת החיבור מודולו n, ותהי $(\mathbf{Z}_n^{\times},\cdot)$ חבורת השאריות הזרות ל-n עם פעולת הכפל מודולו n.
   א) רשמו את טבלת הפעולה עבור: $(\mathbf{Z}_4,+)$, $(\mathbf{Z}_8^{\times},\cdot)$.
   ב) האם אלו חבורות ציקליות? נמקו.
   ג) האם אלו חבורות איזומורפיות? נמקו.

2.
   א) תהי $G_1=\mathbf{R}^{2\times 2}$ (קבוצת כל המטריצות הממשיות מסדר 2×2). לגבי פעולת כפל מטריצות – האם G_1 אגודה? מונואיד? חבורה? קומוטטיבית? נמקו.
   ב) תהי $G_2=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$
   קבוצת מטריצות ממשיות מסוימות מסדר 2×2. הוכח ש-G_2 חבורה לגבי כפל מטריצות. האם היא קומוטטיבית? ציקלית? נמקו.

3. תהי $(G,+)$ חבורה קומוטטיבית עם איבר יחידה 0. נניח ש-$G\neq\{0\}$.
   א) נגדיר פעולה נוספת על G: $\quad a\cdot b:=0 \qquad (\forall a,b\in G)$
   האם $(G,+,\cdot)$ חוג? קומוטטיבי? עם יחידה? חוג חילוק? שדה? נמקו.
   ב) נגדיר על G הנ"ל פעולה אחרת: $\quad a\circ b:=a \qquad (\forall a,b\in G)$
   האם $(G,+,\circ)$ חוג? קומוטטיבי? עם יחידה? חוג חילוק? שדה? נמקו.

4.
   א) חשבו, בחוג הפולינומים $\mathbf{Z}_3[x]$, את המחלק המשותף המירבי (gcd) של
   $a(x)=x^5+x^3+\overline{2}x^2+x+\overline{2}, \qquad b(x)=x^3+x+\overline{1}$
   ב) האם הפולינום $a(x)$ הנ"ל הוא אי-פריק? נמקו.
   ג) האם הפולינום $b(x)$ הוא אי-פריק? נמקו.

5. תהי $\Sigma = \{a,b\}$.

א) רשמו אוטומט סופי (לא דטרמיניסטי) המזהה את השפה $L = (a \cup ab)^*$.

ב) רשמו אוטומט סופי דטרמיניסטי המזהה את השפה הנ"ל. הסבירו את דרך עבודתכם, ובדקו את פעולתו של האוטומט על המלה $aababb$.

6. תהי $\Sigma = \{a,b\}$.

א) הוכיחו שהשפה $L_1 = (ab \cup ba)^* \setminus (ab)^*$ היא רגולרית (אין צורך לבנות אוטומט).

ב) בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי המזהה את השפה $L_2 = \Sigma^* \setminus (ab)^*$.