

**בחינת סיום (מועד א') בקורס**  
**מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)**  
**מרצה: פרופ' רון עדין**

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
אין להשתמש בחומר עזר, פרט למחשבון פשוט.  
מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשעור או בתרגיל. נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים. גם לטיוטות יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, בעמודים נפרדים שיסומנו "טיוטה".

**מהצחה!**

1. תהי  $(\mathbb{Z}_n, +)$  חבורת השאריות מודולו  $n$  עם פעולת החיבור מודולו  $n$ , ותהי  $(\mathbb{Z}_n^\times, \cdot)$  חבורת השאריות הזרות ל- $n$  עם פעולת הכפל מודולו  $n$ .  
(א) רשמו את טבלת הפעולה עבור:  $(\mathbb{Z}_6^\times, \cdot)$ ,  $(\mathbb{Z}_3, +)$ ,  $(\mathbb{Z}_2, +)$ .  
(ב) האם אלו חבורות ציקליות? נמקו.  
(ג) אילו מהחבורות הנ"ל איזומורפיות? נמקו.

2. תהי  $G = \mathbb{R}_+$  (קבוצת המספרים הממשיים החיוביים) עם הפעולה "  $\circ$  " המוגדרת ע"י:  
 $a \circ b := 2^{\log_2 a \cdot \log_2 b} \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}_+)$   
(א) האם  $(G, \circ)$  אגודה? מונואיד? חבורה? קומוטיבית? נמקו.  
(ב) רשמו את כל היחידות הימניות והשמאליות ב- $(G, \circ)$ , ואת ההפכיים הימניים והשמאליים של האיבר  $4 \in G$  (אם יש).

3. יהי  $R := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid x \text{ מופיעות רק חזקות זוגיות של } p(x)\}$   
למשל:  $1 + 4x^2 \in R$  אך  $2x + 2x^2 \notin R$ . האם, לגבי פעולות חיבור וכפל של פולינומים,  $R$  הוא חוג? קומוטיבי? עם יחידה? חוג חילוק? שדה? נמקו.

4. חשבו, בחוג  $\mathbb{Z}_{1000}$ , את ההפרש  $\overline{13}^{-1} - \overline{31}^{-1}$  ( $a^{-1}$  הוא ההפכי של  $a$ ). פרטו את חישוביכם.

5. תהי  $\Sigma = \{a, b\}$ .  
(א) רשמו אוטומט סופי (לא דטרמיניסטי) המזהה את השפה  $L = aba^*b \cup abb^*a$ . בדקו את פעולתו על המלה  $ababa$ .  
(ב) רשמו אוטומט סופי דטרמיניסטי המזהה את השפה הנ"ל.

6. תהי  $\Sigma = \{a, b\}$ .  
(א) רשמו אוטומט סופי דטרמיניסטי בעל 3 מצבים המזהה את השפה  $L_1 = \Sigma^* ab \Sigma^*$  (מלים המכילות את הרצף  $ab$ ).  
(ב) רשמו אוטומט סופי דטרמיניסטי (למשל, אוטומט מכפלה) המזהה את השפה  $L_2 = \Sigma^* ab \Sigma^* \cap (\Sigma \Sigma)^*$  (מלים באורך זוגי המכילות את הרצף  $ab$ ).