

**בחינת סיום (מועד ב') בקורס**  
**מבנים דיסקרטיים להנדסה (83217)**  
**מרצה: פרופ' רון עדין**

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).  
יש לענות על 5 מתוך 6 השאלות. כל השאלות שוות-משקל.  
אין להשתמש בחומר עזר (גם לא במחשבון).  
מותר להשתמש בכל משפט שנלמד בשעור או בתרגיל. נא להסביר באופן ברור את דרך הפתרון, ולכלול במחברת את כל החישובים הנחוצים. גם לטיוטות יש להשתמש במחברת הבחינה בלבד, בעמודים נפרדים שיסומנו "טיוטה".

*בהצלחה!*

1. תהי  $G = \mathbb{Z}$  (קבוצת המספרים השלמים) עם הפעולה "o":  

$$a \circ b := a + 2 \cdot b + 2 \quad (\forall a, b \in \mathbb{Z})$$
 כאשר "+" הוא חיבור רגיל, "·" כפל רגיל.  
 (א) רשמו את כל היחידות הימניות והשמאליות של  $(G, \circ)$ .  
 (ב) האם  $(G, \circ)$  אגודה? מונואיד? חבורה? קומוטטיבית? נמקו.

2. (א) תהי  $G$  חבורה, ויהיו  $a, b \in G$ . הוכיחו:  $(ab)^2 (ba)^{-1} b = a (ab^{-1})^{-1} \Rightarrow b = a^{-1}$   
 (ב) תהי  $G$  חבורה בעלת 12 אברים. רשמו את כל האפשרויות עבור מספר האברים של תת-חבורה  $H$  של  $G$ . נמקו.

3. תהי  $S$  הקבוצה הבאה של פולינומים:  

$$S := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$$
 האם, לגבי פעולות חיבור וכפל פולינומים,  $S$  היא: חוג? קומוטטיבי? עם יחידה? חוג חילוק? שדה? נמקו.

4. (א) מצאו, בעזרת אלגוריתם אוקלידס, את המחלק המשותף המירבי (gcd) של  $a = 200$ ,  $b = 49 \in \mathbb{Z}$  והביעו אותו כצירוף לינארי של  $b, a$  (עם מקדמים שלמים).  
 (ב) מצאו את ההפכי של  $\overline{49}$  בחוג  $\mathbb{Z}_{200}$ .  
 (ג) רשמו בעזרת סעיף ב' (ולא ע"י חישוב ישיר) את ההפכי של  $\overline{151}$  בחוג  $\mathbb{Z}_{200}$ .

5. יהי  $\Sigma = \{a, b\}$ . הוכיחו: השפה  $L = \{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n > 0\}$  אינה רגולרית.

6. תהי  $\Sigma = \{a, b\}$ .

(א) לכל אחת מהשפות הבאות, מצאו אוטומט סופי דטרמיניסטי המזהה אותה:  
 $L_1 = ab^*$ ,  $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ באורך אי-זוגי}\}$ ,  $L_3 = L_1 \cap L_2$ .

(ב) מצאו, עבור השפה  $L_3$  מסעיף ב', אוטומט דטרמיניסטי מינימלי (בעל 4 מצבים) המזהה אותה. הסבירו את הפתרון ובדקו את תשובתכם.