

217-83-תרגיל 6-פתרון:

1. בכמה דרכים ניתן לצבוע בשני צבעים את המשבצות בלוח מגודל 2×3 אם צביעות המתקבלות זו מזו ע"י סיבוב ב- 180° או שיקוף של הלוח נחשבות זהות?

נשים לב כי $|X| = 2^6, G = \{e, a, b, ab\}$

1	2
3	4
5	6

$$Id = (1)(2)\dots(6)$$

$$a = (16)(25)(34)$$

$$b = (12)(34)(56)$$

$$ab = (15)(26)(3)(4)$$

$g \in G$	$ X_g $
Id	כולם- 2^6
a סיבוב	2^3
b שיקוף	2^3
ab	2^4

$$k = \frac{1}{|G|} \sum |X_g| = \frac{1}{4} (2^6 + 2 \cdot 2^3 + 2^4) \quad \text{לכן:}$$

2. א. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב-4 צבעים 6 סוסים על קרוסלה? (כל סוס בצבע אחיד)

נשים לב כי $|X| = 4^6, G = \{e, a, a^2, \dots, a^5\}$

$g \in G$	$ X_g $
Id	כולם- 4^6
a	4
a^2	4^2
a^3	4^3
a^4	4^2
a^5	4

$$k = \frac{1}{|G|} \sum |X_g| = \frac{1}{6} (4^6 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 4^3) \quad \text{לכן:}$$

ב. בכמה דרכים ניתן לצבוע ב-4 צבעים את צלעותיו של משושה משוכלל (כל צלע בצבע אחיד) אם צביעות המתקבלות זו מזו ע"י סיבוב ב- 60° או שיקוף של הלוח נחשבות זהות?

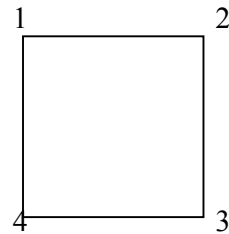
נשים לב כי $|X| = 4^6, G = \{e, a, a^2, \dots, a^5, b, ab, a^2b, \dots, a^5b\}$

$$k = \frac{1}{|G|} \sum |X_g| = \frac{1}{12} (4^6 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^4)$$

ג.
ב-ב' נלקחת בחשבון גם סימטריית השיקוף.

3. מה המספר האפשרי של צביעות קודקודי ריבוע ב-3 צבעים (כחול, אדום וירוק - לא חייבים להשתמש בכלם)?

נשים לב כי $|X| = 3^4, G = \{e, a, a^2, a^3, b, ba, ba^2, ba^3\}$



$$Id = (1)(2)(3)(4)$$

$$a = (1234)$$

$$a^2 = (13)(42)$$

$$a^3 = (1432)$$

$$b = (12)(34) \Rightarrow k = \frac{1}{|G|} \sum |X_g| = \frac{1}{8} (3^4 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3)$$

$$ba = (13)(2)(4)$$

$$ba^2 = (14)(23)$$

$$ba^3 = (1)(24)(3)$$

4. נתונה פעולה $G \times X \rightarrow X$ כאשר $G := D_2$ ו $|X| = 19$.
הוכח או הפרך: קיימת נקודת שבת.

$$|G| = 4$$

$$[x_i] = |G|/|G_{x_i}| \in \{1,2,4\} \Rightarrow$$

$$19 = |X| = \sum [x_i] = 1 \cdot a + 2b + 4c = 1 \cdot a + 2(b + 2c) \Rightarrow$$

$$19 - 1 \cdot a \Rightarrow 19 - a = 2(b + 2c)$$

לכן בהכרח קיימת נקודת שבת.