<u>83-217-תרגיל 5-פתרון:</u>

1) משפט לגרנז' אומר כי הסדר של ת"ח של חבורה סופית מחלק את סדר החבורה, הראו שגם הסדר של כל איבר מחלק את סדר החבורה (רמז: סדר של תת-חבורה מתאימה).

נשים לב כי $<a>\leq G$ $\forall a\in G$ היות ויש סגירות והפיכים בתוכה, לכן, ע"ס משפט לגרנז' סידרה מחלק את סדר החבורה, אך סידרה הוא סדר האיבר היוצר אותה, כלומר סידרו של a.

2) הוכח שאם G חבורה מסדר ראשוני p אז כל איבר $e\neq g\in G$ הוא מסדר p והסק ש G ציקלית.

ע"ס (1) סדר כל איבר מחלק את סדר החבורה, אם סדר החבורה ראשוני אז סדר כל איבר הוא 1-שזהו רק איבר היחידה, או p כנדרש:

$$g\in G: g^k=e\Rightarrow k\mid p$$
$$p\quad is\quad prime\Rightarrow k=1,p$$
$$if\quad k=p:\quad done$$
$$if\quad k=1:\quad g=e\rightarrow \text{contradiction}$$

3) ע"פ משפט קיילי, מצא את השיכון(הומורפיזם חח"ע, או איזומורפיזם לתת חבורה) לחבורה הסימטרית המתאימה עבור $D_3=<a,b:a^3=b^2=1, bab=a^{-1}>$ (שימו לב שמצאנו במפורש כמה אייברים ב Dn ואמרנו מי הם, העזרו בכך), וודא שקבוצת התמונות שקיבלת היא אכן תת חבורה (רמז: ציקליות).

בD_3 6 אייברים:

$$D_3=\{e,b,a,ab,a^2,a^2b\}$$

לכן נמצא שיכון ל S_6:

$$eD_3=D_3\Rightarrow e\mapsto Id$$
$$bD_3=\{b,e,ab,a,a^2b,a^2\}\Rightarrow b\mapsto\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&1&4&3&6&5\end{pmatrix}=(12)(34)(56)$$
$$aD_3=\{a,ab,a^2,a^2b,e,b\}\Rightarrow b\mapsto\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\5&6&1&2&3&4\end{pmatrix}=(153)(264)$$
$$abD_3=\{ab,a,a^2b,a^2,b,e\}\Rightarrow b\mapsto\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&5&2&1&4&3\end{pmatrix}=(163254)$$
$$a^2D_3=\{a^2,a^2b,e,b,a,ab\}\Rightarrow b\mapsto\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&5&6&1&2\end{pmatrix}=(135)(246)$$
$$a^2bD_3=\{a^2b,a^2,b,e,ab,a\}\Rightarrow b\mapsto\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&6&5&2&1\end{pmatrix}=(145236)$$

נוודא שזו תת חבורה:

זו ת"ח ציקלית

$(163254)^2 = (135)(246)$

$(163254)^3 = (12)(65)(34)$

$(163254)^4 = (153)(264)$

$(163254)^5 = (145236)$

$(163254)^0 = id$

ולכן כל המכפלות וההפיכים בפנים.

4) מי הן תתי החבורות של $(\Omega_{20}, \cdot)$? ביחרו אחת מהן, בנו את אוסף הקוסטים השמאליים(=חבורת המנה), מיצאו את האינדקס המתאים והשוו לגודל חבורת המנה שמצאתם.

$$H \le \Omega_{20} \Leftrightarrow H =< \omega^i >: i \mid 20$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \omega \rangle, \langle \omega^2 \rangle, \underline{\langle \omega^4 \rangle = \{e, \omega^4, \omega^8, \omega^{12}, \omega^{16}\}}, \langle \omega^5 \rangle, \langle \omega^{10} \rangle \le \Omega_{20}$$

$$\Omega_{20} / < \omega^4 >= \{\omega^i < \omega^4 >: i = 0,...,19\} = \{< \omega^4 >, \omega < \omega^4 >, \omega^2 < \omega^4 >, \omega^3 < \omega^4 >\} \cong \{e, \omega, \omega^2, \omega^3\}$$

$$[\Omega_{20} :< \omega^4 >] = 20/5 = 4 = \left|\Omega_{20} / < \omega^4 >\right|$$

בהצלחה וחג שמח!