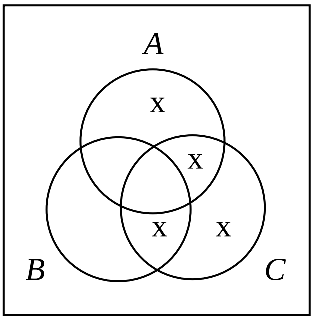
תשובות לשאלות בחינה (מועדים א׳, ב׳) בקורס מתמטיקה בדידה למהנדסים (83116)

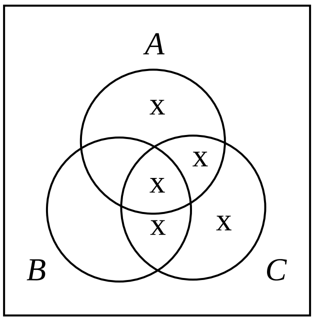
מרצה: פרופ׳ רון עדין

מועד א׳

1. דיאגרמות ון:



$(A\cup C)\setminus(A\cap B)$



$(A\setminus B)\cup C$

<u>הוכחה א:</u> בעזרת תכונות של הפעולות בקבוצות. למשל:

$$(A\cup C)\setminus(A\cap B)=(A\setminus(A\cap B))\cup(C\setminus(A\cap B))=$$
$$=(A\setminus B)\cup(C\setminus(A\cap B))\subseteq(A\setminus B)\cup C$$

<u>הוכחה ב:</u> על-ידי בדיקת כל $2^3=8$ המקרים של שייכות \ אי-שייכות איבר ל-3 הקבוצות.

<u>דוגמא:</u>

$$A=B=C=\{1\}:\quad (A\setminus B)\cup C=\{1\}\neq\varnothing=(A\cup C)\setminus(A\cap B)$$

2.

א) נרשום פונקציה על-ידי הזוג הסדור של ערכיה: $(f(a),f(b))$. 6 הפונקציות (אברי X) החד-חד-ערכיות הן: $(0,1),(0,2),(1,0),(1,2),(2,0),(2,1)$

ב) בודקים ש-R הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

ג) מחלקות השקילות (אברי X/R) נקבעות לפי הסכום $f(a)+f(b)$. בסימוני סעיף א׳ (אבל גם עבור פונקציות לא חח״ע), אלו הן:

$\{(0,0)\}$

$\{(1,0),(0,1)\}$

$\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$

$\{(2,1),(1,2)\}$

$\{(2,2)\}$

3. יהי a_n מספר הדרכים לרצף את השפה כנדרש. כמה ערכים התחלתיים:

$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 7.$

נוסחת-חזרה:

$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} \qquad (n \ge 2)$

פתרון (נוסחה מפורשת):

$a_n = \frac{3}{4} \cdot 3^n + \frac{1}{4} \cdot (-1)^n = \frac{1}{4}(3^{n+1} - (-1)^{n+1}) \qquad (n \ge 0)$

4.

א)

$$DNF(f) = (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee$$
$$(p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q \wedge r)$$
$$CNF(f) = \neg DNF(\neg f) = p \vee \overline{q} \vee r$$

ביטוי קצר ככל האפשר עבור f הוא $p \vee \overline{q} \vee r$ (או: $(q \to (p \vee r)$).

ב) בגלל קיום צורת CNF (או DNF) לכל פונקציה בוליאנית, $\{\neg, \wedge, \vee\}$ היא קבוצת קַשָּׁרִים שלמה. את $\vee$ ניתן להביע באמצעות שני הקשרים האחרים:

$p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q)$

5.

א) <u>הוכחה א:</u> גזירת נוסחת הבינום

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

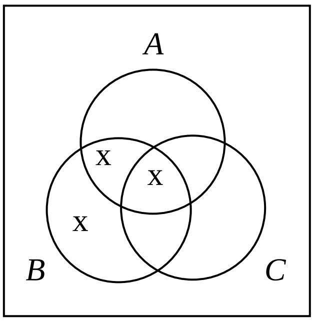
לפי x, ואחר-כך הצבת $x = 1$.

<u>הוכחה ב:</u> (קומבינטורית) אגף שמאל הוא מספר הדרכים לבחור תת-קבוצה S של $\{1,\ldots,n\}$ (שגודלה k אינו נתון מראש) ואחר-כך לבחור איבר (נציג) x מתוכה. אגף ימין הוא מספר הדרכים לבחור איבר x של $\{1,\ldots,n\}$ ואחר-כך לבחור תת-קבוצה S של $\{1,\ldots,n\}$ המכילה אותו. בשני המקרים סופרים בעצם אותו דבר.

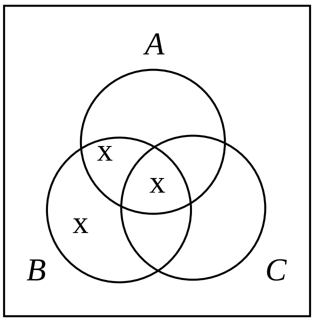
ב) $D(4,50) = \binom{4+50-1}{50} = \binom{53}{50}$

מועד ב׳

1. דיאגרמות ון:



$D_2 = B \setminus (C \setminus A)$



$D_1 = [A \cup (B \setminus C)] \cap B$

מהדיאגרמות רואים: $D_1 = D_2$. הוכחה בעזרת תכונות של הפעולות בקבוצות:

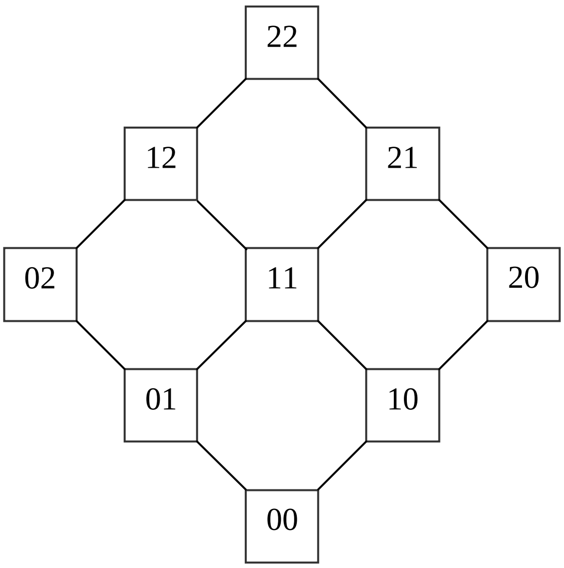
$$D_1 = [A \cup (B \cap C')] \cap B = (A \cap B) \cup [(B \cap C') \cap B] = (A \cap B) \cup (B \cap C')$$
$$= B \cap (A \cup C') = B \cap (A' \cap C)' = B \setminus (C \setminus A) = D_2$$

אפשר להוכיח גם על-ידי בדיקת כל $2^3 = 8$ המקרים של שייכות \ אי-שייכות איבר ל-3 הקבוצות.

.2

א) בודקים ש- R רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.

ב) נתאר כל פונקציה $f \in A$ על-ידי זוג הערכים $(f(x), f(y))$.
דיאגרמת הסה:



ג) איבר מינימלי יחיד: $(0,0)$.
איבר מקסימלי יחיד: $(2,2)$.

.3 $(n \ge 0) \qquad a_n = 10 \cdot 2^n - 17 \cdot 3^n + 8 \cdot 4^n$

.4

א)

$$DNF(f) = (\overline{p} \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{p} \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge q \wedge r)$$
$$CNF(f) = \neg DNF(\neg f) = (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee q \vee \overline{r})$$

ב) $\{\neg, \wedge, \vee\}$ היא קבוצת קשרים שלמה, בגלל קיום צורת CNF (או DNF) לכל פונקציה בוליאנית. את $\wedge$ ניתן להביע באמצעות שני הקשרים האחרים:

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q)$$

לבסוף, את $\neg$ ואת $\vee$ ניתן להביע באמצעות $\overline{\vee}$:

$$\neg p = p \,\overline{\vee}\, p, \qquad p \vee q = (p \,\overline{\vee}\, q) \,\overline{\vee}\, (p \,\overline{\vee}\, q)$$

.5

א) נציב בנוסחת הבינום

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

פעם $x = 1$ ופעם $x = -1$, נחבר ונחלק ב- 2.

ב) ״זר ל- 60״ פירושו: לא מתחלק באף אחד מהגורמים הראשוניים של 60 (שהם $5,3,2$). נגדיר:

$$U := \{1, \ldots, 100\}$$
$$A_1 := \{i \in U \mid 2 \text{ divides } i\}$$
$$A_2 := \{i \in U \mid 3 \text{ divides } i\}$$
$$A_3 := \{i \in U \mid 5 \text{ divides } i\}$$

מספר המספרים עד 100 שאינם מתחלקים ב- $5,3,2$ הוא

$$\begin{aligned} s_0 &= |U| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 100 - \left(\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor \right) - \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor \\ &= 100 - (50 + 33 + 20) + (16 + 10 + 6) - 3 = 26 \end{aligned}$$