פתרון תרגיל 6 - קומבינטוריקה

.1

א. לועדה הראשונה יש $\binom{40}{3}$ אפשרויות, לועדה השנייה נותרו $\binom{37}{3}$ אפשרויות ולועדה השלישית נותרו $\binom{34}{5}$ אפשרויות. לכן התשובה היא: $\binom{34}{5}\binom{37}{3}\binom{40}{3}$. (אם לא מבחינים בין שתי הועדות של 3 תלמידים, יש לחלק את התוצאה ב-2.)

ב. לועדה הראשונה יש $\binom{40}{3}$ אפשרויות, לועדה השנייה יש $\binom{40}{3}$ אפשרויות ולועדה השלישית יש $\binom{40}{5}$ אפשרויות. לכן התשובה היא: $\binom{40}{5}\binom{40}{3}\binom{40}{3}$.

.2 את 4 הסטודנטים המסוימים שחייבים לשבת בשורה הראשונה אפשר לסדר ב- $7!/3!$ אפשרויות, את 3 הסטודנטים המסוימים שחייבים לשבת בשורה השנייה אפשר לסדר ב- $7!/4!$ אפשרויות, ואת שלושת הסטודנטים הנותרים אפשר לסדר ב-$7!/4!$ אפשרויות. לכן מספר האפשרויות הוא: $\frac{(7!)^3}{4!4!3!}$.

.3

א. 0 אינה יכולה להיות הספרה הראשונה, ולכן מספר האפשרויות הוא: $4\cdot 9^4$.

ב. נצטרך להבדיל בין 2 מקרים: אם הספרה 4 אינה הראשונה משמאל, אז יש $\binom{4}{2}$ אפשרויות למקם פעמיים את הספרה 4 בין ארבע הספרות האחרות; אח"כ יש 8 אפשרויות לבחירת הספרה השמאלית; ואת שתי הספרות שנותרו אפשר לבחור ב-9^2 דרכים. לכן במקרה זה יש $\binom{4}{2}\cdot 8\cdot 9^2$ אפשרויות. אם הספרה 4 היא הראשונה משמאל, אז יש עוד 4 אפשרויות למקם עוד ספרה 4 בין ארבע הספרות האחרות; ואת שאר הספרות אפשר לבחור ב-9^3 דרכים. לכן במקרה זה יש $4\cdot 9^3$ אפשרויות. <u>תשובה:</u> $\binom{4}{2}\cdot 8\cdot 9^2+4\cdot 9^3$.

ג. מספר האפשרויות שאנו מחפשים הוא מספר האפשריות הכללי פחות מספר האפשרויות ש-0 לא מופיע בכלל או מופיע פעם אחת בדיוק. מספר האפשרויות הכללי הוא $9\cdot 10^4$; מספר האפשרויות ש-0 לא מופיע הוא 9^5; מספר האפשרויות ש-0 מופיע פעם אחת הוא $4\cdot 9^4$. לכן מספר האפשרויות המבוקש הוא: $9\cdot 10^4 - 9^5 - 4\cdot 9^4$.

ד. מספר האפשרויות שאנו מחפשים הוא מספר האפשריות הכללי פחות מספר האפשרויות ש-4 לא מופיע. מספר האפשרויות הכללי הוא $9\cdot 10^4$, מספר האפשרויות ש-4 לא מופיע הוא $8\cdot 9^4$. לכן מספר האפשרויות המבוקש הוא $9\cdot 10^4 - 8\cdot 9^4$.

.4 $\binom{12}{9}$ (מותרות חזרות ואין חשיבות לסדר).

.5 נבחר קודם 8 אנשים מתוך ה-16; זאת ניתן לעשות ב- $\binom{16}{8}$ דרכים. את 8 האנשים שנבחרו אפשר לסדר ב-$7!$ דרכים בשולחן הראשון ואת 8 האנשים שנותרו אפשר לסדר ב-$7!$ דרכים בשולחן השני. כיוון ששני השולחנות זהים נצטרך לחלק ב-2 ולכן מספר האפשרויות הוא: $(7!)^2\binom{16}{8}\frac{1}{2}$.

6.
א. $12!$.
ב. $10!\binom{6}{2}2$.
ג. $7!6!$.
ד. $2(6!)^2$.
ה. $6!\cdot 2^6$.

7.
א. $11!$.
ב. לא רלוונטי.
ג. $(6!)^2$.
ד. $5!6!$.
ה. $5!\cdot 2^6$.

8. אם $n \le k$ אז יש $\frac{k!}{(k-n)!}$ אפשרויות. אם $k < n$ אז בהתחלה בוחרים k אנשים שיישבו בספסל, וזאת ניתן לעשות ב-$\binom{n}{k}$ דרכים. אח"כ אפשר לסדר אותם ב-$k!$ דרכים. לכן יש $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!$ אפשרויות.

9.
א. $\binom{17}{12}$.
ב. $\binom{11}{6}$.
ג. $\binom{14}{9}$.

10. $\frac{10!}{5!4!}$.