פתרון תרגיל 5 – תורת הקבוצות ולוגיקה

1. א. רפלקסיביות: נניח $x \in A$. כיוון ש-$x = x$ נובע מהגדרת R ש-$(x,x) \in R$.
אנטי סימטריות: נניח $(x,y),(y,x) \in R$. אם $x = y$ סיימנו. אחרת מתקיים $(y\text{-}k)^2 > (x\text{-}k)^2$ וגם $(x\text{-}k)^2 > (y\text{-}k)^2$, וזו כמובן סתירה.
טרנזיטיביות: נניח $(x,y),(y,z) \in R$; צ"ל: $(x,z) \in R$. אם $x = y$ או $y = z$ אז הטענה ברורה. לכן נניח ש-$x \neq y, y \neq z$. אזי מתקיים $(x\text{-}k)^2 > (y\text{-}k)^2$ וגם $(y\text{-}k)^2 > (z\text{-}k)^2$. לכן $(x\text{-}k)^2 > (z\text{-}k)^2$ ולכן $(x,z) \in R$.

ב. צריך למצוא תנאים על k כך שלכל $x,y \in A$ יתקיים $(x,y) \in R$ או $(y,x) \in R$.
לכן נניח ש-$x,y \in A$ וגם ש-$(x,y) \notin R$. צריכים למצוא תנאים על k כך שבהכרח $(y,x) \in R$. אם $(x,y) \notin R$ אז $x \neq y$ וגם $(x\text{-}k)^2 \leq (y\text{-}k)^2$. אם רוצים שיתקיים התנאי $(y,x) \in R$ אז כיוון ש-$x \neq y$ חייבים שיתקיים $(x\text{-}k)^2 < (y\text{-}k)^2$, אבל אנו יודעים ש-$(x\text{-}k)^2 \leq (y\text{-}k)^2$. לכן כל מה שצריך לדאוג הוא ש-$(x\text{-}k)^2 \neq (y\text{-}k)^2$, כלומר צריך לדאוג ש-$x\text{-}k \neq y\text{-}k,\ x\text{-}k \neq k-y$ (כי $(x\text{-}k)^2 = (y\text{-}k)^2$ אם ורק אם $x\text{-}k = \pm(y\text{-}k)$). כיוון ש-$x \neq y$ אז ברור ש-$x\text{-}k \neq y\text{-}k$, לכן כל מה שצריך לדאוג הוא ש-$x\text{-}k \neq k\text{-}y$, כלומר צריך לדאוג ש-$k \neq (x+y)/2$.
אם $k = 1$ אז השוויון $k = (x+y)/2$ מתקיים רק אם $x = y = 1$ (כי $x,y \in \{1,\ldots,n\}$); אבל זה לא יכול להיות כי $x \neq y$.
אם $k = n$ אז השוויון $k = (x+y)/2$ מתקיים רק אם $x = y = n$, וזה שוב לא יכול להיות כי $x \neq y$.
אם $1 < k < n$ אז אפשר לבחור $y = k-1, x = k+1$ ואז מתקיים השוויון $k = (x+y)/2$ וגם $x,y \in \{1,2,..,n\}$.

2. א. רפלקסיביות: נניח כי $A = (A_1,..,A_s)$ היא חלוקה של הקבוצה $\{1,...,n\}$. ברור שלכל i $A_i \subseteq A_i$, כלומר A היא העדנה של עצמה. לכן מתקיימת רפלקסיביות.
אנטי סימטריות: נניח כי $A = A_1,..,A_s$, $B = (B_1,..,B_t)$ חלוקות של הקבוצה $\{1,..,n\}$ ונניח ש-$A \succ B$ וגם ש-$B \succ A$. אזי לכל 1≤i≤t קיים 1≤j≤s כך ש-$B_i \subseteq A_j$ וגם לכל 1≤j≤s קיים 1≤i≤t כך ש-$A_j \subseteq B_i$. לכן אם A_j קבוצה כלשהי בחלוקה A אז קיימת B_i כך ש-$A_j \subseteq B_i$ וגם קיימת A_k כך ש-$B_i \subseteq A_k$. לכן $A_j \subseteq A_k$; אבל $A_1,..,A_s$ הן קבוצות זרות לא ריקות ולכן בהכרח $A_j = A_k$. לכן $A_j \subseteq B_i \subseteq A_j$ כלומר $A_j = B_i$.
לכן כל $A_j \in \{A_1,..,A_s\}$ מקיימת $A_j \in \{B_1,..,B_t\}$, ולכן $\{B_1,..,B_t\} \subseteq \{A_1,..,A_s\}$.
באותו אופן מראים ש-$\{B_1,..,B_t\} \supseteq \{A_1,..,A_s\}$. לכן $\{B_1,..,B_t\} = \{A_1,..,A_s\}$.
טרנזיטיביות: נניח כי $A = (A_1,..,A_s)$, $B = (B_1,..,B_t)$, $C = (C_1,..,C_p)$ הן חלוקות של $\{1,..,n\}$ כך ש-$A \succ B$ ו-$B \succ C$. נניח כי C_r קבוצה בחלוקה של C. אזי קיימת B_k בחלוקה של B כך ש-$C_r \subseteq B_k$, וגם קיימת A_j בחלוקה של A כך ש-$B_k \subseteq A_j$. לכן $C_r \subseteq A_j$.
כלומר, לכל קבוצה C_r בחלוקה של C קיימת A_j בחלוקה של A כך ש-$C_r \subseteq A_j$. לכן נובע מההגדרה ש-$A \succ C$.

ב. איבר מינימלי: $\{\{1\},\{2\},..,\{n\}\}$, איבר מקסימלי: $\{\{1,2,..,n\}\}$.

3. א. $p \leftrightarrow \bar{q} \equiv \overline{(p \leftrightarrow q)}$

p	Q	$\bar{q}$	$p \leftrightarrow \bar{q}$	$p \leftrightarrow q$	$\overline{(p \leftrightarrow q)}$
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0

ב. $p \equiv p \vee (p \wedge q)$

P	Q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

ג. $p \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r) \wedge (p \vee q \vee \bar{r}) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r})$

p	q	r	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$p \vee q \vee r$	$p \vee \bar{q} \vee r$	$p \vee q \vee \bar{r}$	$p \vee \bar{q} \vee \bar{r}$	
1	1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1	0

ד. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{r} \to p) \equiv (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$

p	q	r	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{r}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\bar{r} \to p$	$(\bar{p} \wedge \bar{q}) \wedge (\bar{r} \to p)$	$\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

4. א. $q \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$q \leftrightarrow (\bar{p} \vee \bar{q})$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0

DNF- $\bar{p} \wedge q$

CNF- $(\bar{p} \vee \bar{q}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee q)$

ב. $((p \to q) \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \bar{q}$	$((p \to q) \wedge \bar{q}) \to \bar{p}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1

DNF- $(p \wedge q) \vee (p \wedge \bar{q}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$

CNF- 1 (ריק)

ג. $(p \vee (q \to r)) \to \bar{q}$

p	q	r	$\bar{q}$	$q \to r$	$p \vee (q \to r)$	$(p \vee (q \to r)) \to \bar{q}$
1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

DNF- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r})$

CNF- $(p \vee \bar{q} \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$

ד. $(p \to (q \vee \bar{r})) \wedge (q \vee r)$

p	q	r	$\bar{r}$	$q \vee \bar{r}$	$p \to (q \vee \bar{r})$	$q \vee r$	$(p \to (q \vee \bar{r})) \wedge (q \vee r)$
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	0

DNF- $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r)$

CNF- $(\bar{p} \vee q \vee \bar{r}) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee r)$

.5 $\{\neg, \wedge\}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$	$\overline{\bar{p} \wedge \bar{q}}$	$p \vee q$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0

ניתן לבטא את $\vee$ ע"י $\{\neg, \wedge\}$

$\{\neg, \vee\}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{\bar{p} \vee \bar{q}}$	$p \wedge q$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0