פתרון תרגיל 4 – תורת הקבוצות

1. א. נכון: נניח R ו-S רפלקסיביים. אזי לכל $x \in A$ מתקיים $(x,x)\in S$ וגם $(x,x)\in R$.
לכן לכל $x \in A$ $(x,x) \in S\cap R$, ולכן $S\cap R$ רפלקסיבי.
ב. נכון: נניח בשלילה שקיים $x\in A$ כך ש- $(x,x)\notin S\cup R$. אזי $(x,x)\notin S$ או $(x,x)\notin R$.
נניח בלי הגבלת הכלליות ש-$(x,x)\notin S$, ונקבל סתירה לכך ש- S רפלקסיבי.
ג. נכון: נניח ש- $(x,y)\in S\cap R$, ואז $(x,y)\in S$ וגם $(x,y)\in R$. כיוון ש- R ו-S סימטריים נובע ש- $(y,x)\in S$ וגם $(y,x)\in R$. לכן $(y,x)\in S\cap R$, ולכן $S\cap R$ סימטרי.
ד. נכון: נניח ש- $(x,y)\in S\cup R$. אזי $(x,y)\in R$ או $(x,y)\in S$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $(x,y)\in S$. כיוון ש-S סימטרי נובע ש- $(y,x)\in S$. לכן $(y,x)\in S\cup R$, ולכן $S\cup R$ סימטרי.
ה. נכון: נניח ש- $(x,y)\in S\cap R$ וגם $(y,z)\in S\cap R$. אזי $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$.
מכיוון ש-R טרנזיטיבי נובע ש- $(x,z)\in R$. באותו אופן $(x,z)\in S$, ולכן $(x,z)\in S\cap R$.
לכן $S\cap R$ טרנזיטיבי.
ו. לא נכון: ניקח $S=\{(1,2)\}$ ו-$R=\{(2,3)\}$. כאן S ו-R טרנזיטיביים באופן ריק , אבל $S\cup R=\{(1,2),(2,3)\}$ לא טרנזיטיבי כי $(1,3)\notin S\cup R$.

2. א. צ"ל ש- R רפלקסיבי , סימטרי וטרנזיטיבי.
רפלקסיביות: ברור ש- $(X,X)\in R$ כי $X\cap B = X\cap B$.
סימטריות: אם $(X,Y)\in R$ אז $X\cap B = Y\cap B$ ולכן $Y\cap B = X\cap B$ ז"א $(Y,X)\in R$.
טרנזיטיביות: אם $(X,Y)\in R$ ו-$(Y,Z)\in R$ אז $X\cap B = Y\cap B$ וגם $Y\cap B = Z\cap B$.
לכן $X\cap B = Z\cap B$ ז"א $(X,Z)\in R$.
לכן R יחס שקילות .
ב. נמצא את מחלקות השקילות כאשר $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3\}$, $X = \{1,3,5\}$.
ניקח $\{1\}\subseteq A$ אז

$$[\{1\}] = \{ C\subseteq A \mid (\{1\},C)\in R \}= \{ C\subseteq A \mid C\cap B = \{1\}\cap B \}$$
$$\{C\subseteq A \mid C \cap\{1,2,3\} = \{1\}\cap\{1,2,3\} \} =$$
$$\{C\subseteq A \mid C \cap\{1,2,3\} = \{1\}\}= \{\{1\},\{1,4\},\{1,5\}, \{1,4,5\}\}$$

באותו אופן נקבל ש-

$$[\{2\}] = \{\{2\} , \{2,4\} , \{2,5\} , \{2,4,5\}\}$$
$$[\{3\}] = \{\{3\} , \{3,4\} , \{3,5\} , \{3,4,5\}\}$$
$$[\{1,2\}] = \{\{1,2\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,4,5\}\}$$
$$[\{1,3\}] = \{\{1,3\}, \{1,3,4\} , \{1,3,5\},\{1,3,4,5\}\}$$
$$[\{2,3\}] = \{\{2,3\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,4,5\}\}$$
$$[\{1,2,3\}] = \{\{1,2,3\},\{1,2,3,4\},\{1,2,3,5\} ,\{1,2,3,4,5\}\}$$
$$[\{4\}] = \{\varnothing, \{4\}, \{5\}, \{4,5\}\}$$

כיוון שאיחוד כל הקבוצות הנ"ל נותן את $P(A)$ מצאנו את כל מחלקות השקילות.

3.א. נוכיח ש- R רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי .
אם $x\in A$ אז $f(x) = f(x)$ ולכן $(x,x)\in R$. לכן R רפלקסיבי.
אם $(x,y)\in R$ אז $f(x) = f(y)$. לכן $f(y) = f(x)$ לכן $(y,x)\in R$ לכן R סימטרי.
אם $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ אז $f(x) = f(y)$ וגם $f(y) = f(z)$. לכן $f(x) = f(z)$
לכן $(x,z)\in R$ ולכן R טרנזיטיבי.

ב. נמצא את מחלקות השקילות אם $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B=\{0,1,2,3\}$, $f(x) = |x-3|$.
ניקח לדוגמא $1\in A$, אז

$[1] = \{y \in A \mid (1,y) \in R\} = \{y \mid f(1) = f(y)\} = \{y \mid 2 = |y-3|\} =$
$\{y \mid \pm 2 = y-3\} = \{y \mid y = 5$ או $y = 1\} = \{1,5\}$
באותו אופן נקבל ש-

$[2] = \{2,4\}$
$[3] = \{3\}$

ואלו הן מחלקות השקילות.

4. א.

I. נוכיח ש-R יחס שקילות ,
נוכיח ש-R רפלקסיבי , נניח $x \in \mathbb{Z}$ אז $7|(3x + 4x)$ כי $7|7x$ לכן $(x,x) \in R$.
נוכיח ש-R סימטרי , נניח $(x,y) \in R$ אז $7|(3x + 4y)$, כיוון ש- $7|(7x + 7y)$ נובע ש- $7|((7x + 7y) - (3x+4y))$ כלומר $7|(4x+3y)$ לכן $(y,x) \in R$.
נוכיח ש-R טרנזיטיבי , נניח $(x,y) \in R$ וגם $(y,z) \in R$ אז $7|(3x + 4y)$
וגם $7|(3y + 4z)$ לכן $7|((3x + 4y)+(3y + 4z))$ כלומר $7|(3x + 7y + 4z)$
אבל $7|7y$ לכן $7|(3x + 7y + 4z - 7y)$ כלומר $7|(3x + 4z)$ לכן $(x,z) \in R$.

נמצא את מחלקות השקילות , ניקח לדוגמא $1 \in \mathbb{Z}$ אז ,
$[1] = \{y \in \mathbb{Z} \mid 7|(3+4y)\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid y = (7k-3)/4\} =$
המספר $(7k-3)/4$ שלם רק אם $k = 4j + 1$ $(j \in \mathbb{Z})$ לכן
$y = (7k-3)/4 = (7(4j+1) -3)/4 = 7j+1$ לכן
$[1] = \{7j + 1 \mid j \in \mathbb{Z})$
באותו אופן נקבל ש-
$[2] = \{7j + 2 \mid j \in \mathbb{Z}\}$
$[3] = \{7j + 3 \mid j \in \mathbb{Z}\}$
$[4] = \{7j + 4 \mid j \in \mathbb{Z}\}$
$[5] = \{7j + 5 \mid j \in \mathbb{Z}\}$
$[6] = \{7j + 6 \mid j \in \mathbb{Z}\}$
$[7] = \{7j \mid j \in \mathbb{Z}\}$
ואלו כל מחלקות השקילות.

II. R אינו יחס סדר חלקי כי $(8,1) , (1,8) \in R$ אבל $8 \neq 1$ לכן אין אנטי סימטריות.

ב.

I. נוכיח ש-R יחס שקילות:
R רפלקסיבי: נניח $(a_1,...,a_k) \in \mathbb{N}^k$. אזי, לפי הגדרת R , $((a_1,...,a_k), (a_1,...,a_k)) \in R$ (כי R הוא קבוצת כל הזוגות הסדורים של k-יות של מספרים טבעיים כך שה- k-יה השמאלית שווה ל-k-יה הימנית).
R סימטרי : ברור מההגדרה , כי R מכיל רק זוגות (x,y) כך ש- x = y. $(x,y \in \mathbb{N}^k)$
R טרנזיטיבי : גם ברור מההגדרה , כי R מכיל רק זוגות (x,y) כך ש- x = y.

נמצא את מחלקות השקילות של R : ניקח $x \in \mathbb{N}^k$, אז $[x] = \{y \in \mathbb{N}^k \mid (x,y) \in R\}$.
אבל R מכיל זוג (x,y) רק אם x = y ; לכן {x} = [x]. באופן כללי נקבל שמחלקות השקילות הן {x} $(x \in \mathbb{N}^k)$.

II. R יחס סדר חלקי, וזה נובע ישירות מכך ש- $(x,y) \in R \Leftrightarrow x = y$.

ג.

I. R אינו יחס שקילות: אפשר לקחת $\{1\}, \{1,2,3\} \in P(\mathbb{Z})$, ואז
$|\{1,2,3\}\backslash\{1\}| = |\{2,3\}| = 2$. לכן $(\{1,2,3\},\{1\}) \in R$, אבל $(\{1\},\{1,2,3\}) \notin R$ כי $\{1\}\backslash\{1,2,3\} = \varnothing$. לכן R לא סימטרי.

II. R אינו יחס סדר חלקי כי $(A,A)\notin R$ עבור $A\in P(\mathbb{Z})$.

ד.

I. נוכיח ש-R יחס שקילות:

R רפלקסיבי – נניח $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, אז ברור ש- $((m,n),(m,n))\in R$ כי $m+n=m+n$.

R סימטרי – נניח ש- $((m,n),(p,q))\in R$ אז $m+n=p+q$ ולכן $p+q=m+n$, כלומר $((p,q),(m,n))\in R$.

R טרנזיטיבי – נניח $((m,n),(p,q))\in R$ וגם $((p,q),(r,s))\in R$. אזי $m+n=p+q$ וגם $p+q=r+s$ לכן $m+n=r+s$ ולכן $((m,n),(r,s))\in R$.

נמצא את מחלקות השקילות של R. ניקח $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, אז

$$[(m,n)]=\{(p,q)\mid m+n=p+q\}=\{(1,m+n-1),(2,m+n-2),\dots,(3,m+n-3),\dots,(m+n-1,1)\}$$

קל לראות שיש אינסוף מחלקות שקילות.

II . R אינו יחס סדר חלקי , כי למשל $((1,2),(2,1))\in R$ וגם $((2,1),(1,2))\in R$ אבל $(1,2)\neq(2,1)$.

5.א. נוכיח ש-R יחס סדר חלקי , ברור ש- $((n,m),(n,m))\in R$ כי $n\geq m$ ו- $m\geq n$.

אם $((n,m),(p,q))\in R$, $((p,q),(r,s))\in R$ אז $n\geq p$, $q\geq m$ וגם $p\geq r$, $s\geq q$.
לכן $n\geq r$ ו- $s\geq m$, לכן $((n,m),(r,s))\in R$.

אם $((n,m),(p,q))$, $((p,q),(n,m))\in R$, אז $n\geq p$, $q\geq m$ וגם $p\geq n$, $m\geq q$.
לכן $p=n$ ו $m=q$ – ולכן $((n,m),(p,q))=((p,q),(m,n))$.

ב. איבר מקסימלי $(3,1)$, איבר מינימלי $(1,3)$.