פתרון תרגיל 3 – תורת הקבוצות

.1

$R=\{(\emptyset,\emptyset),(\emptyset,\{1\}),(\emptyset,\{2\}),(\emptyset,\{3\}),(,\emptyset,\{1,2\})\ \emptyset,\{1,3\}),$
$(\emptyset,\{2,3\}),(,\emptyset,\{1,2,3\})\ (\{1\},\{1\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{1\},\{1,3\}),(\{1\},\{1,2,3\})$
$(\{2\},\{2\}),(\{2\},\{1,2\}),(\{2\},\{2,3\}),(\{2\},\{1,2,3\})\ ,(\{3\},\{3\}),(\{3\},\{1,3\})$
$(\{3\},\{2,3\}),(\{3\},\{1,2,3\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\{1,2\},\{1,2,3\}),(\{1,3\},\{1,3\})$
$(\{1,3\},\{1,2,3\}),(\{2,3\},\{2,3\}),(\{2,3\},\{1,2,3\}),(\{1,2,3\},\{1,2,3\})\ \}$

.2 א. <u>f חח"ע</u>.

אם $x>0$ ו- $y\le 0$ וגם $f(y)=f(x)$ אז $2|y|+1 = 2|x|$, וזו סתירה כי מימין יש מספר זוגי ומשמאל מספר אי זוגי.

אם $x , y > 0$ וגם $f(x)=f(y)$ אז $2x = 2y$ ולכן $x = y$

אם $x , y \le 0$ וגם $f(x)=f(y)$ אז $2|x|+1=2|y|+1$ לכן $|x|=|y|$ ולכן $-x = -y$ ולכן $x=y$.

<u>f על</u>.

נניח n מספר טבעי אי זוגי וגדול מ-1 , אז $n=2k+1$ כאשר k טבעי, ואז $f(-k) = 2|-k|+1 = 2k+1$. אם n זוגי אז $n=2k$ כאשר k טבעי. לכן $f(k)=2k$.

אם $n=1$ אז $f(0)=1$. לכן f על.

ב. <u>f חח"ע</u>.

נניח $f(B)=f(C)$ אז $A\backslash B=A\backslash C$, כלומר $A\cap B^C = A\cap C^C$

כלומר $(A\cap B^C)^C = (A\cap C^C)^C$, לפי דה מורגן נקבל : $(A^C)\cup B = (A^C)\cup C$

ולכן $((A^C)\cup B)\cap A = ((A^C)\cup C)\cap A$. נשתמש בחוק הפילוג:

$((A^C)\cap A)\cup(A\cap B) = ((A^C)\cap A)\cup(A\cap C)$, אבל $(A^C)\cap A = \emptyset$.

לכן $A\cap B=A\cap C$ אבל $B,C\subseteq A$ לכן $B=C$. לכן f חח"ע.

<u>f על</u>.

נניח $B\subseteq A$ אז $f(A\backslash B)=B$.

ג. f לא חח"ע כי $f(0)=f(1)$.

f לא על כי אין מקור ל-1 (כי $(1-|2x-1|)/2\le 1/2$)

ד. <u>f חח"ע</u>.

אם $n\neq m$ ונניח בלי הגבלת הכלליות ש- $n>m$ אז בקבוצה $f(n)$ יופיע האיבר n ובקבוצה $f(m)$ הוא לא יופיע.

f לא על , כי בכל קבוצה בתמונה של f יופיע האיבר 1.

.3 א. $f[\{1789,122221,313\}] = \{4,6,3\}$

ב. $f^{-1}[\{1,2,3\}] = \{1,2,3,...,999\}$

ג. $(fof)(333)=1$

.4

$R^{-1}=\{(x,1) , (y,1) , (z,2), (z,3) ,(x,4)\}$

$S^{-1} = \{(1,x),(2,x),(2,y),(1,z),(4,z)\}$

$RoS=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2)\}$

$SoR=\{(x,x),(x,y),(x,z),(y,z),(z,x),(z,y)\}$

.5 א. ניקח $f:\{1,2\}\rightarrow\{1,2,3\}$ $g:\{1,2,3\}\rightarrow\{1,2\}$ ע"י

$g(1)=1 , g(2)=2 , g(3)=2 , f(1)=1 , f(2)=2$

ב. הסתכלו ב-א.