

פתרון תרגיל 2 - תורת הקבוצות

1. תהינה $C \subseteq D$ ו- $A \subseteq B$, הוכיחו :

א. $A \cup C \subseteq B \cup D$

ב. $A \cap C \subseteq B \cap D$

ג. $A \cup (A \cap B) = A$

ד. $A \cup (A \cap B) = A$

ה. האם $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$? לא נכון, אפשר לקחת $A = \{1\}$, $B = \{2\}$

ו. האם $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$? נכון, כי ברור ש- $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$

מצד שני, אם $C \in P(A)$ וגם $C \in P(B)$ אז $C \subseteq A$ וגם $C \subseteq B$ לכן $C \subseteq A \cap B$ ולכן $C \in P(A \cap B)$

2. נניח A ו- B קבוצות כלשהן

א. הוכיחו את שקילות ההגדרות

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus B \cup B \setminus A$$

ב. הוכיחו או הפריכו:

I. $A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ (לא נכון, אפשר לקחת $A = B = C = \emptyset$)

II. $A \Delta (B \cup C) = (A \Delta B) \cup (A \Delta C)$ (לא נכון, אפשר לקחת $A = \{1,2\}, B = \{1\}, C = \{2\}$)

III. $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$ (לא נכון, אפשר לקחת $A = B = C$)

3. נניח $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b,c\}$, מצאו את איברי הקבוצות

א. $A \cup (B \times A)$ (פתרון: $\{1,2,(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$)

ב. $(A \times A) \cup (B \times A)$ (פתרון: $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$)

4. תהינה A, B, C קבוצות כלשהן, הוכיחו או הפריכו:

א. $(A \times A) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times (A \cup C)$ (לא נכון, אפשר לקחת $A = \{1\}, B = C = \{2\}$)

ב. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ נכון

ג. $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$ (לא נכון, אפשר לקחת: $A = B = \emptyset$)