תרגיל 5 – תורת הקבוצות ולוגיקה

1. תהי $A = \{1,2,..,n\}$ ויהי $1 \le k \le n$. נגדיר יחס R על A:

$$R=\{(a,b) \in A\times A \mid (a = b) \vee ((a-k)^2 > (b-k)^2)\}$$

א. הוכיחו ש- R יחס סדר חלקי.

ב. הוכיחו ש- R יחס סדר ליניארי אם ורק אם $k = 1$ או $k = n$.

2. תהיינה $A = (A_1,\dots,A_s)$ ו- $B = (B_1,\dots,B_t)$ חלוקות של הקבוצה $\{1,..,n\}$, דהיינו: $\bigcup_{i=1}^{s} A_i = \{1,..,n\}$ והקבוצות A_i לא ריקות וזרות זו לזו, וכך גם לגבי $B_1,..,B_t$. נאמר שהחלוקה B <u>מעדנת</u> את החלוקה A אם לכל $1 \le i \le t$ קיים $1 \le j \le s$ כך ש- $B_i \subseteq A_j$. נסמן זאת ע"י $A \succ B$.

א. הוכיחו ש- $\succ$ הוא יחס סדר חלקי על קבוצת החלוקות של $\{1,...,n\}$.

ב. הוכיחו שביחס הסדר החלקי הזה יש איבר מינימלי יחיד ומקסימלי יחיד. מהם?

ג. שרטטו דיאגרמת הסה עבור $n = 3$.

3. יהיו p , q , r פסוקים. הוכיחו את השקילויות הלוגיות הבאות (שוויון של פונקציות בוליאניות):

א. $p \leftrightarrow \overline{q} \equiv \overline{(p \leftrightarrow q)}$

ב. $p \equiv p \vee (p \wedge q)$

ג. $p \equiv (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \overline{q} \vee r) \wedge (p \vee q \vee \overline{r}) \wedge (p \vee \overline{q} \vee \overline{r})$

ד. $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \wedge (\overline{r} \to p) \equiv (\overline{p} \wedge \overline{q} \wedge r)$

4. בנו טבלת אמת , ורשמו בצורת DNF ובצורת CNF כל אחד מהפסוקים הבאים:

א. $q \leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q})$

ב. $((p \to q) \wedge \overline{q}) \to \overline{p}$

ג. $(p \vee (q \to r)) \to \overline{q}$

ד. $(p \to (q \vee \overline{r})) \wedge (q \vee r)$

5. הוכיחו כי: $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$ הן קבוצות קשרים שלמות.