תרגיל 4 – תורת הקבוצות

1. יהיו R, S שני יחסים בקבוצה לא ריקה A. כמובן, גם $S \cap R$, $S \cup R$ הם יחסים ב-A.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
א. אם R, S רפלקסיביים אז גם $S \cap R$ רפלקסיבי.
ב. אם R, S רפלקסיביים אז גם $S \cup R$ רפלקסיבי.
ג. אם R, S סימטריים אז גם $S \cap R$ סימטרי.
ד. אם R, S סימטריים אז גם $S \cup R$ סימטרי.
ה. אם R, S טרנזיטיביים אז גם $S \cap R$ טרנזיטיבי.
ו. אם R, S טרנזיטיביים אז גם $S \cup R$ טרנזיטיבי.

2. תהיינה: A קבוצה לא ריקה, B תת-קבוצה של A. נגדיר יחס R על $P(A)$ על-ידי:
$$(X,Y) \in R \Leftrightarrow B \cap X = B \cap Y \quad (\forall X,Y \in P(A))$$
א. הוכיחו ש-R יחס שקילות.
ב. מצאו את מחלקות השקילות אם $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3\}$, $X = \{1,3,5\}$.

3. תהי $f : A \to B$ פונקציה. נגדיר על A יחס שקילות R על-ידי:
$$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y) \quad (\forall x, y \in A)$$
א. הוכיחו ש-R יחס שקילות.
ב. מצאו את מחלקות השקילות אם $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{0,1, 2, 3\}$, $f(x) = |x - 3|$.

4. עבור כל אחד מהיחסים הבאים קבעו:
I. האם הוא יחס שקילות ? אם כן, רשמו את מחלקות השקילות.
II. האם הוא יחס סדר חלקי? אם כן, הוכיחו.

א. $R = \{(x,y) \mid x , y\in \mathbb{Z} , 7|(3x+4y)\}$
ב. $R=\{ ((a_1,..,a_k),(b_1,,,b_k)) : a_i,b_i \in \mathbb{N}\ (\forall i),\ a_i = b_i \}$
ג. $R=\{(A,B) \in U\times U: |A \setminus B| \geq 2 \}$, $U=P(\mathbb{Z})$
ד. $R=\{((m,n),(p,q)) \mid m,n,p,q \in \mathbb{N}, m + q = n + p \}$

5. תהי $A = \{1,2,3\}$. נגדיר על $A\times A$ יחס סדר חלקי:
$$(m,n)R(p,q) \Leftrightarrow m\geq p , n\leq q.$$
א. הוכיחו ש-R יחס סדר חלקי.
ב. מצאו איברים מקסימאליים ומינימאליים ב- $A\times A$.
ג. שרטטו דיאגרמת הסה.