Латвийский математический ежегодник, 1982, вып. 26 (Рига), с. 250—263

УДК 512.7

Е. Б. Плоткин

СПЛЕТЕНИЯ И ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТОВ

ВВЕДЕНИЕ

Автомат $\mathfrak{A}$ — это тройка (A, Γ, B), где A — множество состояний, Γ — множество входных сигналов, B — множество выходных сигналов, с двумя операциями

$$\circ\colon A\times\Gamma\to A,$$
$$*\colon A\times\Gamma\to B.$$

Если Γ — полугруппа и операции $\circ$ и $*$ удовлетворяют условиям

$$1)\quad a\circ\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)\circ\gamma_2,$$
$$2)\quad a*\gamma_1\gamma_2=(a\circ\gamma_1)*\gamma_2,$$

то говорят о полугрупповом автомате. Объектом наших рассмотрений будут линейные полугрупповые автоматы. Это автоматы, в которых A, B — векторные пространства над фиксированным полем K и действие полугруппы входных сигналов Γ согласовано с линейной структурой на A.

Будем считать, что $|\Gamma|<\infty$, $\dim A<\infty$, $\dim B<\infty$. Эти условия не являются, вообще говоря, всюду необходимыми, однако во многих местах они, не изменяя сути доказательства, упрощают его. Кроме того, для автоматов эти предположения естественны.

Для автоматов стоит вопрос декомпозиции. Выделяются конструкции, с помощью которых произвольный автомат моделируется композицией некоторых других автоматов. Относительно этих автоматов предполагается:

1) что они далее неразложимы с помощью указанных конструкций;

2) что их в определенном смысле можно считать просто устроенными;

3) что они тесно связаны с исходным автоматом.

В случае чистых автоматов, т. е. когда A и B — просто множества, теорема Крона—Роудза [1, 7] дает ответ и подходящей конструкцией оказывается сплетение автоматов. При этом конечный чистый автомат моделируется с помощью групповых автоматов с простой группой входных сигналов и триггеров. Для линейных автоматов применение теоремы Крона—Роудза оказывается невозможным, так как получаемые сомножители уже не являются линейными автоматами. Некоторый аналог этой теореме получается с помощью операции треугольного произведения автоматов [2, 4]. Для дальнейшей редукции мы применяем еще операции сплетения линейного автомата с чистым. Используются также результаты о сведении представлений произвольной полугруппы к представлениям рисовской вполне 0-простой полугруппы [3].

Наряду с полугрупповыми автоматами рассматриваются кольцевые линейные автоматы. Теорема декомпозиции таких автоматов доказана в работе [6].

§ 1. ТРЕУГОЛЬНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Исходной для операции треугольного умножения является ситуация, когда в автомате (A, Γ, B) в A и B выделены подпространства A_0 и B_0 такие, что A_0 инвариантно относительно Γ, и $A_0 * \Gamma \subset B_0$. Мы имеем подавтомат и фактор-автомат. Тогда исходный автомат (A, Γ, B) вкладывается в их треугольное произведение. Напомним определение треугольного произведения произвольных линейных автоматов.

Пусть даны полугрупповые линейные автоматы $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Gamma_1, B_1)$ и $\mathfrak{A}_2 = (A_2, \Gamma_2, B_2)$. Рассмотрим аддитивные группы $\Phi = \mathrm{Hom}(A_2, A_1)$ и $\Psi = \mathrm{Hom}(A_2, B_1)$. Тогда можно определить действия Γ_1, Γ_2 на Φ, Ψ. Полугруппа Γ_2 действует на Φ слева по формуле $a(\gamma \circ \varphi) = (a \circ \gamma)\varphi$ и на Ψ — слева $a(\gamma \circ \psi) = (a \circ \gamma)\psi$. Полугруппа Γ_1 действует на Φ справа по формуле $a(\varphi \circ \gamma) = (a\varphi) \circ \gamma$ и, кроме того, — из Φ в Ψ следующим образом: $a(\varphi * \gamma) = (a\varphi) * \gamma$. Составим теперь полугруппу $\Gamma = \Gamma_1 \times \Phi \times \Psi \times \Gamma_2$, умножение в которой определено формулой

$$(\gamma_1, \varphi_1, \psi_1, \gamma_2)(\gamma_1', \varphi', \psi', \gamma_2') = \\ = (\gamma_1\gamma_1', \varphi' \circ \gamma_1 + \gamma_2 \circ \varphi', \varphi * \gamma_1' + \gamma_2 \circ \psi', \gamma_2\gamma_2').$$

Теперь уже можно определить автомат $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A} \nabla \mathfrak{A}_2$:

$$\mathfrak{A} = (A_1 \oplus A_2,\ \Gamma_1 \times \mathrm{Hom}(A_2, A_1) \times \mathrm{Hom}(A_2, B_1) \times \Gamma_2,\ B_1 \oplus B_2),$$

где действия задаются так: если $a = a_1 + a_2$, $\sigma = (\gamma_1, \varphi, \psi, \gamma_2)$, то

$$a \circ \sigma = a_1 \circ \gamma_1 + a_2\varphi + a_2 \circ \gamma_2,$$
$$a * \sigma = a_1 * \gamma_1 + a_2\psi + a_2 * \gamma_2.$$

Нам понадобятся некоторые дополнительные факты о треугольных произведениях. Условимся отождествлять автомат вида $(0, 0, B)$ с линейным пространством B и автомат вида $(A, \Gamma, 0)$ — с представлением (A, Γ). Рассмотрим треугольное произведение $(0, 0, B) \nabla (A, \Gamma, 0)$ и, исходя из указанного отождествления, определим произведение пространства B на автомат (A, Γ). Имеем автомат

$$B \nabla (A, \Gamma) = (A, \mathrm{Hom}(A, B) \times \Gamma, B),$$
$$(\psi, \gamma)(\psi', \gamma') = (\gamma \circ \psi', \gamma\gamma'),$$

где $\gamma, \gamma' \in \Gamma$; $\psi, \psi' \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $a \circ (\psi, \gamma) = a \circ \gamma$, $a * (\psi, \gamma) = a\psi$.

Лемма 1. Произвольный линейный автомат $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ вкладывается в треугольное произведение $B \nabla (A, \Gamma)$.

Доказательство. Вложение задается тождественными отображениями на пространствах A и B и отображением

$$\mu\colon\ \Gamma \to \mathrm{Hom}(A, B) \times \Gamma,$$
$$\mu\colon\ \gamma \to (\psi, \gamma),$$

где $a \in A$, $\gamma \in \Gamma$, $\psi \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и ψ определяется правилом $a\psi = a * \gamma$. Построенное отображение является мономорфизмом полугрупп:

$$\gamma_1^{\mu}\gamma_2^{\mu} = (\psi_1, \gamma_1)(\psi_2, \gamma_2) = (\gamma_1 \circ \psi_2, \gamma_1\gamma_2) = (\gamma_1, \gamma_2)^{\mu}.$$

Легко видеть, что имеем также гомоморфизм автоматов.

Автомат называется точным, если выполнено условие: если $a \circ \gamma_1 = a \circ \gamma_2$ и $a * \gamma_1 = a * \gamma_2$, то $\gamma_1 = \gamma_2$. От каждого автомата можно перейти к его уточнению — соответствующему точному автомату. Эквивалентные по входным сигналам автоматы — это автоматы с изоморфными уточнениями. Автомат $\mathfrak{A}_1$ называется делителем автомата $\mathfrak{A}$ (обозначается $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}$), если он эквивалентен по входным сигналам эпиморфному образу подавтомата автомата $\mathfrak{A}$. Автомат разложи́м (в треугольное произведение), если он является делителем треугольного произведения, но не является делителем ни одного из сомножителей. В противном случае говорят о неразложимом автомате.

Следующая лемма непосредственно вытекает из теоремы работы [4], леммы 1 и формулы

$$(0, 0, B_1) \nabla (0, 0, B_2) = (0, 0, B_1 \oplus B_2).$$

Лемма 2. Автомат $\mathfrak{A}$ является неразложимым тогда и только тогда, когда он есть либо неприводимое представление, либо одномерное линейное пространство.

Лемма 3. Пусть даны автоматы $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$ и выполнено $\mathfrak{A}_1 \prec \mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2 \prec \mathfrak{A}_2'$. Тогда имеет место

$$\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2 \prec \mathfrak{A}_1' \nabla \mathfrak{A}_2'.$$

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{A}_1^0$ — подавтомат в $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2^0$ — подавтомат в $\mathfrak{A}_2'$ такие, что имеются эпиморфизмы

$$\mu_1: \mathfrak{A}_1^0 \to \mathfrak{A}_1; \quad \mu_2: \mathfrak{A}_2^0 \to \mathfrak{A}_2.$$

Тогда имеется эпиморфизм

$$\mu: \mathfrak{A}_1^0 \nabla \mathfrak{A}_2' \to \mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2'$$

и, кроме того, найдется подавтомат $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2'$ такой, что существует эпиморфизм ν: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2$ [5].

Прообраз автомата $\mathfrak{B}$ относительно эпиморфизма μ и дает необходимый подавтомат в $\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2$.

Содержание леммы сразу переносится на любое конечное число слагаемых.

С помощью треугольного произведения для любого автомата (A, Γ, B) получаем [4]

$$(A, \Gamma, B) \prec B \nabla \underset{i}{\nabla} (A_i, \Gamma_i),$$

где (A_i, Γ_i) — неприводимые автоматы. Таким образом, можно ограничиться лишь неприводимыми представлениями.

§ 2. СПЛЕТЕНИЯ И СТЯГИВАНИЕ

Известна операция сплетения чистых автоматов. Если даны чистые автоматы $\Lambda_1 = (X_1, \Gamma_1, Y_1)$ и $\Lambda_2 = (X_2, \Gamma_2, Y_2)$, то их сплетение (обозначается $\Lambda_1 \mathrm{wr} \Lambda_2$) — автомат:

$$\Lambda_1 \,\mathrm{wr}\, \Lambda_2 = (X_1 \times X_2, \Gamma_1^{X_2} \leftthreetimes \Gamma_2, \quad Y_1 \times Y_2),$$

$$(\bar{\gamma}_1, \gamma_2)(\bar{\gamma}_1', \gamma_2') = (\bar{\gamma}_1 \circ (\bar{\gamma}_1 \circ \gamma_2), \gamma_2\gamma_2'),$$

$$(x_1, x_2) \circ (\bar{\gamma}_1, \gamma_2) = (x_1 \circ \bar{\gamma}_1(x_2), x_2 \circ \gamma_2),$$

$$(x_1, x_2) * (\bar{\gamma}, \gamma_2) = (x_1 * \bar{\gamma}_1(x_2), x_2 * \gamma_2),$$

где $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $\bar{\gamma}_1 \in \Gamma_1^{X_2}$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$. Операция сплетения чистых автоматов является ассоциативной, следовательно, относительно сплетения чистые автоматы в определенном смысле образуют полугруппу.

Введем теперь операцию сплетения линейного автомата с чистым, результатом которой является линейный автомат. Возьмем линейный $\mathfrak{A} = (A, \Gamma_1, B)$ и чистый автоматы $\Lambda = (X, \Gamma_2, Y)$. Тогда их сплетением называется следующий автомат:

$$\mathfrak{A} \,\mathrm{wr}\, \Lambda = (A \otimes KX, \Gamma_1^X \leftthreetimes \Gamma_2, B \otimes KY),$$

$$(a \otimes x) \circ (\bar{\gamma}_1, \gamma_2) = (a \circ \bar{\gamma}_1(x)) \otimes (x \circ \gamma_2),$$

$$(a \otimes x) * (\bar{\gamma}_1, \gamma_2) = (a * \bar{\gamma}_1(x)) \otimes (x * \gamma_2),$$

где $a \in A$, $x \in X$, $\overline{\gamma_1} \in \Gamma_1{}^X$, $\gamma_2 \in \Gamma_2$, KX — линейное пространство, натянутое на множество X. Задав таким образом операции $\circ$ и $*$, мы, действительно, имеем линейные действия полугруппы $\Gamma_1{}^X \searrow \Gamma_2$. В самом деле, так как множество X является базисом линейного пространства KX, $A \otimes KX = \oplus \sum\limits_{x \in X} (A \otimes x)$. Заданное на слагаемых прямой суммы наше действие, очевидно, линейно и поэтому переносится на все пространство $A \otimes KX$ с сохранением линейности.

Для сплетения линейного автомата с чистым выполняется следующая ассоциативность:

$$\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} (\Lambda_2 \operatorname{wr} \Lambda_3) = (\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} \Lambda_2) \operatorname{wr} \Lambda_3.$$

Проверим это. Пусть $\mathfrak{A}_1 = (A_1, \Gamma_1, B_1)$ — линейный автомат, $\Lambda_2 = (X_2, \Gamma_2, Y_2)$, $\Lambda_3 = (X_3, \Gamma_3, Y_3)$ — чистые автоматы. Тогда

$$(\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} (\Lambda_2 \operatorname{wr} \Lambda_3)) = (A_1 \otimes KX_2 \otimes KX_3,\ (\Gamma_1{}^{X_2} \searrow \Gamma_2)^{X_3} \searrow \Gamma_3,$$

$$B_1 \otimes KY_1 \otimes KY_2),$$

$$(\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} \Lambda_2) \operatorname{wr} \Lambda_3 = (A \otimes K(X_2 \times X_3),\ \Gamma_1{}^{X_2 \times X_3} \searrow (\Gamma_2{}^{X_3} \searrow \Gamma_3),$$

$$B_1 \otimes K(Y_2 \searrow Y_3)).$$

Для линейных пространств имеется канонический изоморфизм пространств $A_1 \otimes KX_2 \otimes KX_3 \simeq A_1 \otimes K(X_2 \times X_3)$ (соответственно на B), который задается (на базисе) формулой $a_1 \otimes (x_2, x_3) \to a_1 \otimes x_2 \otimes x_3$. Действующие полугруппы также, очевидно, изоморфны, и явный вид изоморфизма такой: μ: $(\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}, \gamma_3) \to (\overline{\sigma}, \gamma_3)$, где $\overline{\gamma_1} \in \Gamma_1{}^{X_2 \times X_3}$, $\overline{\gamma_2} \in \Gamma_2{}^{X_3}$, $\gamma_3 \in \Gamma_3$, $\overline{\sigma} \in (\Gamma_1{}^{X_2} \searrow \Gamma_2)^{X_3}$. Функция $\overline{\sigma}$ определяется так: $\overline{\sigma}(x_3) \in \Gamma_1{}^{X_2} \searrow \Gamma_2$, следовательно, есть пара $\overline{\sigma}(x_3) = (\overline{\sigma_1}, \overline{\gamma_2}(x_3))$, в которой $\overline{\sigma_1} \in \Gamma_1{}^{X_2}$ и полагается по определению $\overline{\sigma_1}(x_2) = \overline{\gamma_1}(x_2, x_3)$.

Исходя из этого имеем изоморфизм автоматов:

$$(a_1 \otimes (x_2, x_3)) \circ (\overline{\gamma_1}, (\overline{\gamma_2}, \gamma_3))^{\mu} =$$

$$= ((a_1 \circ \overline{\gamma_1}(x_2, x_3)) \otimes ((x_2, x_3) \circ (\overline{\gamma_2}, \gamma_3)))^{\mu} =$$

$$= (a_1 \circ \overline{\gamma_1}(x_2, x_3)) \otimes (x_2 \circ \overline{\gamma_2}(x_3)) \otimes (x_3 \circ \gamma_3),$$

$$(a_1 \otimes (x_2, x_3))^{\mu} \circ (\overline{\gamma_1}, (\gamma_2, \gamma_3))^{\mu} =$$

$$= (a_1 \otimes x_2 \otimes x_3) \circ (\overline{\sigma}, \gamma_3) =$$

$$= ((a_1 \otimes x_2) \circ \overline{\sigma}(x_3)) \otimes (x_3 \circ \gamma_3) =$$

$$= ((a_1 \otimes x_2) \circ (\bar{\sigma}_1, \bar{\gamma}_2(x_3))) \otimes (x_3 \circ \gamma_3) =$$

$$= (a_1 \circ \bar{\sigma}_1(x_3) \otimes (x_2 \circ \gamma_2(x_3))) \otimes (x_3 \circ \gamma_3) =$$

$$= (a_1 \circ \bar{\gamma}_1(x_2, x_3)) \otimes (x_2 \circ \bar{\gamma}_2(x_3)) \otimes (x_3 \circ \gamma_3).$$

Указанная ассоциативность, другими словами, означает, что задано действие полугруппы чистых автоматов на классе линейных автоматов. Отметим еще без доказательства связь треугольных произведений со сплетениями.

Лемма 4. Имеют место следующие вложения:

$$\mathfrak{A}_1 \nabla (\mathfrak{A}_2 \operatorname{wr} \Lambda) \subset (\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2) \operatorname{wr} \Lambda,$$
$$(\mathfrak{A}_1 \nabla \mathfrak{A}_2) \operatorname{wr} \Lambda \subset (\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} \Lambda) \nabla (\mathfrak{A}_2 \operatorname{wr} \Lambda).$$

Нам понадобится также простая

Лемма 5. Если $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}$ и $\Lambda_1 < \Lambda$, то $\mathfrak{A}_1 \operatorname{wr} \Lambda_1 < \mathfrak{A} \operatorname{wr} \Lambda$.

В заключение еще одно замечание. Сплетение представления $(A, \Gamma) = (A, \Gamma, 0)$ с некоторым Λ снова является представлением. Сплетение пространства с чистым автоматом не является пространством.

Предположим теперь, что дано представление (A, Σ) и в $K\Sigma$ существует элемент e, действующий как единица в A. Пусть, кроме того, имеются левое и правое действия полугруппы Γ на Σ, удовлетворяющие условиям

$$(\gamma_1 x)\gamma_2 = \gamma_1(x\gamma_2),$$
$$(x_1 x_2)\gamma = x_1(x_2\gamma),$$
$$\gamma(x_1 x_2) = (\gamma x_1)x_2.$$

(Это выполнено, например, для регулярного действия.) Тогда формулой

$$a \circ \gamma = a \circ e\gamma$$

определяется представление (A, Γ). Действительно,

$$(a \circ \gamma_1) \circ \gamma_2 = (a \circ e\gamma_1) \circ e\gamma_2 = ((a \circ e\gamma_1) \circ e\gamma_2) \circ e = a \circ (e\gamma_1 e\gamma_2 e) =$$

$$= a \circ ((e\gamma_1 e)(\gamma_2 e)) = (a \circ e\gamma_1 e) \circ (\gamma_2 e) = ((a \circ e\gamma_1) \circ e) \circ (\gamma_2 e) =$$

$$= (a \circ e\gamma_1) \circ \gamma_2) \circ e = (a \circ e\gamma_1) \circ \gamma_2 = a \circ e\gamma_1\gamma_2 = a \circ \gamma_1\gamma_2.$$

Представление (A, Γ) полностью определяется представлением (A, Σ) и действием Γ на Σ, и будем говорить, что (A, Γ) стягивается в (A, Σ), и обозначать $(A, \Gamma) \mid (A, \Sigma)$. Легко видеть, что если исходное представление (A, Σ) неприводимо, то в $K\Sigma$ всегда существует требуемый элемент e [3].

Известно [3], что стягивание дает взаимно-однозначное соответствие между представлениями произвольных (конечных) полугрупп и представлениями 0-простых полугрупп. Приведем это известное рассуждение в удобном для нас виде.

Пусть (A, Γ) — неприводимое представление и U — множество элементов из Γ, действующих в A как нуль. Очевидно, U — двусторонний идеал в Γ. Пусть J — минимальный двусторонний идеал, содержащий U. Возникает представление (A, J), которое также является неприводимым. В самом деле, вместе с (A, J) имеем также представление (A, KJ). Рассмотрим инвариантное относительно J подпространство $a \circ KJ$, $a \in A$. Так как J — двусторонний идеал, то $a \circ KJ$ инвариантно относительно Γ. В силу неприводимости (A, Γ) получаем, что либо $a \circ KJ = A$, либо $a \circ KJ = 0$. Пусть A_0 — линейное подпространство в A, порожденное элементами $a \in A$ такими, что $a \circ KJ = 0$. Тогда оно инвариантно относительно Γ, так как $(a \circ \gamma) \circ j = a \circ \gamma j = 0$, $\gamma \in \Gamma$, $j \in J$. Следовательно, $A_0 = A$ или $A_0 = 0$. Но ввиду $U \subset J$ имеем $A_0 \neq A$. Поэтому $a \circ KJ = A$ и (A, J) неприводимо. Как отмечалось, в KJ имеется элемент e. Так как конгруэнция, отвечающая идеалу U, лежит в ядре (A, J), то правилом

$$a \circ \bar{j} = a \circ j, \quad \bar{j} \in \Sigma = J/U, \quad j \in J,$$

определено представление (A, Σ).

Полугруппа Σ или проста, или 0-проста, или с нулевым умножением [3]. Однако последнее невозможно. Если $\sigma_1 \sigma_2 = 0$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$, то $a \circ (\sigma_1 \sigma_2) = 0$. Так как это выполнено для любого $\sigma_2 \in \Sigma$, то $(a \circ \sigma_1) \circ K\Sigma = 0$. Следовательно, для любого $a \in A$, $\sigma \in \Sigma$ имеем $(a \circ \sigma) = 0$, что противоречит определению Σ. Полугруппа Γ действует в Σ по правилу:

$$\gamma \bar{j} = \overline{\gamma j}, \quad \gamma \in \Gamma, \quad \bar{j} \in \Sigma,$$

$$\bar{j} \gamma = \overline{j \gamma}.$$

Тогда между (A, Σ) и (A, Γ) имеется связь:

$$(a \circ \overline{e\gamma}) = a \circ e\gamma = (a \circ e) \circ \gamma = a \circ \gamma.$$

Итак, получили, что $(A, \Gamma) \mid (A, \Sigma)$, где Σ — вполне 0-простая полугруппа.

Таким образом, все свелось к изучению автоматов с вполне 0-простыми действующими полугруппами.

§ 3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ АВТОМАТОВ. СЛУЧАЙ ВПОЛНЕ 0-ПРОСТОЙ ПОЛУГРУППЫ

Полугруппа Γ называется 0-простой, если она обладает нулем, который является единственным собственным двусторонним идеалом, и, кроме того, $\Gamma^2 \neq 0$. Если множество идемпотентов

0-простой полугруппы содержит примитивный идемпотент, то говорят о вполне 0-простой полугруппе. (Упорядоченность на множестве идемпотентов такая: $e \leqslant f$ тогда и только тогда, когда $ef = fe = e$.) Для конечных полугрупп эти два понятия совпадают.

Согласно теореме Риса [3] любая вполне 0-простая полугруппа Г изоморфна рисовской матричной полугруппе $\Gamma = (X, G, Y, [X, Y])$, где X, Y — множества, G — группа с нулем, $P = [X, Y]$ — сэндвич-матрица без нулевых строк с элементами из G, с помощью которой осуществляется умножение в Г.

Элементы из Г — это тройки: (x, g, y), $x \in X$, $g \in G$, $y \in Y$. Умножение в Г следующее:

$$(x_1, g_1, y_1)(x_2, g_2, y_2) = (x_1, g_1[y_1, x_2]g_2, y_2),$$

где $x_1, x_2 \in X$, $g_1, g_2 \in G$, $y_1, y_2 \in Y$, $[y_1, x_2] \in G$. С любым множеством можно связать полугруппу. Пусть M — множество. Полагая $m_1 m_2 = m_1$; $m_1, m_2 \in M$, определим ассоциативную операцию на множестве M. Полученная полугруппа называется полугруппой левых нулей на множестве M (обозначается M^e). Двойственно определяется M^r-полугруппа правых нулей на M ($m_1 m_2 = m_2$; $m_1, m_2 \in M$). Иногда мы не будем различать элементы множества M и полугруппы M^e (M^r).

Для рисовской полугруппы Г можно устроить вложение [7]:

$$\mu : \Gamma \to X^e \times (G \operatorname{wr} Y^r) = X^e \times (\bar{G} \rightthreetimes Y^r).$$

Приведем его полностью.

Лемма 6. Пусть дано отображение

$$\mu : (x, g, y) \to (\bar{x}, \bar{g}, \bar{y}),$$

где $\bar{x} \in X^e$, $\bar{y} \in Y^r$, а $\bar{g} \in \bar{G} = G^{Y^r}$ и определено формулой

$$\bar{g}(y') = [y', x]g.$$

Тогда μ есть мономорфизм Г в $X^e \times (\bar{G} \rightthreetimes Y^r)$.

Доказательство. 1. μ — гомоморфизм.

$$[(x, g_1, y_1)(x_2, g_2, y_2)]^{\mu} = (\bar{x}, \overline{g_1[y_1, x_2]g_2}, \bar{y}_2),$$

$$(x_1, g_1, y_1)^{\mu}(x_2, g_2, y_2)^{\mu} = (\bar{x}_1, \bar{g}_1, \bar{y}_1)(\bar{x}_2, \bar{g}_2, \bar{y}_2) = $$
$$= (\bar{x}_1, \bar{g}_1(\bar{g}_2 \circ \bar{y}_1), \bar{y}_2).$$

Но имеем

$$(\bar{g}_1(\bar{y}_1 \circ \bar{g}_2))(y) = \bar{g}_1(y)(\bar{y}_1 \circ g_2)(y) = \bar{g}_1(y)\bar{g}_2(y_1) =$$
$$= [y, x_1]g_1[y_1, x_2]g_2 = \overline{g_1[y_1, x_2]g_2}(y).$$

2. μ — мономорфизм. Пусть $(\bar{x}_1, \bar{g}_1, \bar{y}_1) = (\bar{x}_2, \bar{g}_2, \bar{y}_2)$. Тогда, очевидно, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Далее, $\bar{g}_1(y) = [y, x_1]g_1$, $\bar{g}_2(y) = [y, x_2]g_2$.

Так как в сэндвич-матрице нет нулевых строк, то найдется y такой, что $[y,x]\neq 0$. Теперь, учитывая, что G — группа, получаем $g_1=g_2$. Будем считать, что группа G вложена в Γ с помощью отмеченных элементов $(1,1)$ — единиц множеств X и Y и отображение $G\to\Gamma$ задается правилом $g\to(1,g,1)$.

Построим индуцированный автомат с автомата (A,G) относительно вложения G в Γ. Если дан автомат (A,G), то можно определить новый автомат $(A\otimes KY^r,\Gamma)$:

$$(a\otimes y)\circ(x,g,y_1)=(a\circ[y,x]g)\otimes y_1.$$

Лемма 7. Автомат $\mathfrak{A}=(A\otimes KY,\Gamma)$ является индуцированным автоматом для автомата $\mathfrak{A}_1=(A,G)$.

Доказательство. Введем автомат $\overline{\mathfrak{A}}=(\bar{A},\Gamma)$. Рассмотрим формальные выражения $A_y=A\circ(1,e,y)$, где e — единица группы G. Автомат $\overline{\mathfrak{A}}=(\bar{A},\Gamma)$ определим так: $(\bar{A},\Gamma)=(\oplus\sum\limits_{y}A_y,\Gamma)$,

$$(a\circ(1,e,y))\circ(x,g,y_1)=(a\circ[y,x]g)\circ(1,e,y_1).$$

Этим задан полугрупповой автомат

$$\begin{aligned}(a\circ(1,e,y))\circ((x,g_1,y_1)(x_1,g_2,y_2))&=\\=(a\circ(1,e,y))\circ(x_1,g_1[y_1,x_1]g_2,y_2)&=\\=(a\circ([y,x]g_1[y_1,x_1]g_2))\circ(1,e,y_2);&\\((a\circ(1,e,y))\circ(x,g_1,y_1))\circ(x_1,g_2,y_2)&=\\=((a\circ[y,x]g_1)\circ(1,e,y_1))\times&\\\times(x_1,g_2,y_2)=((a\circ[y,x]g_1)\circ([y_1,x_1]g_2))\circ(1,e,y_2)&=\\=(a\circ[y,x]g_1[y_1,x_1]g_2)(1,e,y_2).&\end{aligned}$$

Автомат (A,G) естественно вкладывается в $(\bar{A},\Gamma)$:

$$\rho: a\to a\circ(1,e,1),\ g\to(1,g,1),$$

ρ является мономорфизмом автоматов:

$$(a\circ g)^\rho=(a\circ g)\circ(1,e,1);\ a^\rho\circ g^\rho=(a\circ(1,e,1))\circ(1,g,1)=\\=(a\circ g)\circ(1,e,1).$$

Покажем, что $\overline{\mathfrak{A}}=(\bar{A},\Gamma)$ — индуцированный автомат для $\mathfrak{A}_1=(A,G)$, т. е. нужно построить гомоморфизм, замыкающий диаграмму

$$\begin{tikzcd}(A,G) \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\nu"'] & & (\bar{A},\Gamma) \arrow[dl, "\mu?"] \\ & (A_1,\Gamma) & \end{tikzcd}$$

где (A, Γ) — некоторый автомат, ν — гомоморфизм автоматов. Зададим μ:

$$(a\circ(1, e, y))^{\mu}=a^{\nu}\circ(1, e, y).$$

Ясно, что μ — действительно гомоморфизм автоматов:

$$((a\circ(1, e, y))\circ(x, g, y_1))^{\mu}=((a\circ[y, x]g)\circ(1, e, y_1))^{\mu}=$$
$$=(a\circ[y, x]g)^{\nu}\circ(1, e, y_1)=(a^{\nu}\circ(1, [y, x]g, 1))\circ(1, e, y_1)=$$
$$=(a^{\nu}\circ(1, e, y))\circ(x, g, y_1)=((a\circ(1, e, y))^{\mu}\circ(x, g, y_1)).$$

Осталось заметить, что отображение ξ, тождественное на G и действующее из $\bar{A}$ в $A\otimes KY$ по правилу ξ: $a\otimes y\to a\circ(1, e, y)$, дает изоморфизм автоматов $(\bar{A}, \Gamma)$ и $(A\otimes KY, \Gamma)$.

Лемма 8. Пусть (A_1, Γ) — неприводимый автомат (представление) с рисовской полугруппой Γ и (A, G) — соответствующий неприводимый подавтомат. Тогда имеет место

$$(A_1, \Gamma)\prec(A, G)\,\mathrm{wr}\,(Y, Y^r).$$

Доказательство. Пусть (A, Γ) — неприводимый автомат. Легко видеть, что тогда гомоморфизм ν: $(A\otimes KY, \Gamma)\to(A_1, \Gamma)$ является эпиморфизмом.

Зададим отображение μ: $(A\otimes KY, \Gamma)\to(A, G)\,\mathrm{wr}\,(Y, Y^r)$. На пространстве $A\otimes KY$ возьмем тождественное отображение, а μ: $\Gamma\to G\,\mathrm{wr}\,Y^r$ есть проекция на $G\,\mathrm{wr}\,Y^r$ отображения μ из леммы 6. Это гомоморфизм автоматов

$$((a\otimes y)\circ(x, g, y_1))^{\mu}=((a\circ[y, x]g)\otimes y_1)^{\mu}=(a\circ[y, x]g)\otimes y_1,$$
$$(a\otimes y)^{\mu}\circ(x, g, y_1)^{\mu}=(a\otimes y)\circ(\bar{g}, \bar{y}_1)=$$
$$=(a\circ\bar{g}(y))\otimes y\bar{y}_1=(a\circ[y, x]g)\otimes y_1.$$

Обозначим образ $(A\otimes KY, \Gamma)$ относительно μ через $(A\otimes KY, \bar{\Gamma})$. Пусть $\rho=\mathrm{Ker}\,\mu$. Тогда, очевидно, $(A\otimes KY, \Gamma/\rho)\simeq(A\otimes KY, \bar{\Gamma})$. Легко видеть, что ρ совпадает с ядром автомата $(A\otimes KY, \Gamma)$. Рассмотрим сквозной эпиморфизм

$$\mu': (A\otimes KY, \bar{\Gamma})\to(A\otimes KY, \Gamma/\rho)\to(A_1, \Gamma/\rho).$$

В силу эпиморфизма ν ядро автомата $(A\otimes KY, \Gamma)$ лежит в ядре автомата (A_1, Γ). Следовательно, автоматы (A_1, Γ) и $(A_1, \Gamma/\rho)$ эквивалентны. Но тогда из наличия эпиморфизма μ' следует, по определению, что (A_1, Γ) является делителем $(A, G)\,\mathrm{wr}\,(Y, Y^r)$.

Из доказательства предыдущей леммы следует, что если полугруппа Γ допускает точное неприводимое представление, то имеет место вложение $(A\otimes KY, \Gamma)\subset(A, G)\,\mathrm{wr}\,(Y, Y^r)$ и, в частности, рисовская полугруппа Γ вкладывается уже в $G\,\mathrm{wr}\,Y^r$.

Перейдем к основным результатам параграфа.

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$ — линейный полугрупповой автомат, Γ — вполне 0-простая полугруппа. Тогда имеет место

$$\mathfrak{A}\prec B\nabla\nabla_i(\mathfrak{A}_i\,\mathrm{wr}(Y_i,Y_i^r)),$$

где все $\mathfrak{A}_i=(A_i,G_i)$ — неприводимые групповые автоматы, являющиеся делителями автомата $\mathfrak{A}=(A,\Gamma,B)$, Y_i^r — полугруппы правых нулей.

Доказательство. Прежде всего из леммы 1 имеем вложение

$$(A,\Gamma,B)\subset B\nabla(A,\Gamma).$$

Воспользуемся теперь теоремой о треугольном разложении линейных автоматов [4]. Получим, что

$$(A,\Gamma)\prec\nabla_i(A_i,\Gamma_i),$$

где все (A_i,Γ_i) — неприводимые делители (A,Γ). Все полугруппы Γ_i автоматов (A_i,Γ_i) являются гомоморфными образами исходной вполне 0-простой полугруппы Γ и потому сами являются вполне 0-простыми полугруппами [3].

Рассмотрим сомножители $\mathfrak{A}_i=(A_i,\Gamma_i)$. Получим

$$(A_i,\Gamma_i)\prec(A_i',G_i)\,\mathrm{wr}(Y_i,Y_i^r),$$

где (A'_i,G) — неприводимый групповой автомат (лемма 8). Но согласно лемме 3 отсюда следует, что

$$(A,\Gamma,B)\prec B\nabla\nabla_i((A_i',G_i)\,\mathrm{wr}(Y_i,Y_i^r)).$$

Все автоматы (A'_i,G) являются подавтоматами в (A_i,Γ_i) и, следовательно, делителями исходного автомата (A,Γ,B).

Теорема 1 сводит полугрупповой автомат с вполне 0-простой полугрупповой к групповым и чистым автоматам. Основную роль в разложении играют групповые сомножители, которые и составляют, фактически, сложность автомата. Покажем, что есть возможность дальнейшего сведéния к неприводимым автоматам с простой группой, которые назовем *простыми групповыми автоматами.*

Лемма 9. Пусть (A,G) — неприводимый групповой автомат, пространство A — конечномерно. Тогда

$$(A,G)\prec(\nabla_i(A_i,H))\,\mathrm{wr}(X,\Phi),$$

где (A_i,H) — простой групповой автомат, (X,Φ) — чистый групповой автомат.

Доказательство. Возьмем в G композиционный ряд

$$G\supset H_1\supset\ldots\supset H_{n-1}\supset H_n=1.$$

Рассмотрим H_1. Имеем [5]

$$(A, G) \prec (A_1 H_1) \operatorname{wr} (X_1, G_1),$$

где $G_1 = G/H_1$ — простая группа, а X_1 — группа G/H_1, рассматриваемая как множество.

Далее, аналогично

$$(A, H_1) \prec (A, H_2) \operatorname{wr} (X_2, G_2) \text{ и т. д.}$$

В результате имеем

$$(A, G) \prec (A, H_{n-1}) \operatorname{wr} (X_{n-1}, G_{n-1}) \operatorname{wr} \ldots$$
$$\ldots \operatorname{wr} (X_1, G_1) = (A, H_{n-1}) \operatorname{wr} (X', G').$$

Известно, что (A, H_{n-1}) вполне приводим. Поэтому $(A, H_{n-1}) \subset \subset \nabla_i (A_i, H_{n-1})$, где все (A_i, H_{n-1}) уже неприводимы. Обозначим $H_{n-1} = H$, это простая группа. Итак,

$$(A, G) \prec (\nabla_i (A_i, H)) \operatorname{wr} (X', G').$$

Отметим, что для чистого автомата (X', G') также имеется разложение на простые групповые сомножители:

$$(X', G') = (X_n, G_n) \operatorname{wr} \ldots \operatorname{wr} (X_{n-1}, G_{n-1}),$$

и все G_i, по построению, — простые группы.

Применяя доказанную лемму, можно усилить теорему 2.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{A} = (A, \Gamma, B)$ — линейный полугрупповой автомат, Γ — вполне 0-простая полугруппа. Тогда имеет место

$$\mathfrak{A} \prec B \nabla \nabla_i (((\nabla_j \mathfrak{A}_{ij}) \mathop{Wr}_s \Lambda_{is}) \operatorname{wr} \Lambda_i'),$$

где $\mathfrak{A}_{ij}$ — линейные простые групповые автоматы; Λ_{is} — чистые групповые автоматы с простой действующей группой; Λ_i' — чистые полугрупповые автоматы, у которых действующие полугруппы являются полугруппами правых нулей. Кроме того, все линейные автоматы $\mathfrak{A}_{ij}$ являются делителями исходного автомата $\mathfrak{A}$.

Теперь, чтобы окончательно выяснить структуру разложения, остается решить вопрос о неразложимых автоматах.

Линейный автомат (A, Γ) назовем *разложимым в сплетение*, если его можно представить:

$$(A, \Gamma) \prec (B, \Sigma) \operatorname{wr} (X, H),$$

где (A, Γ) не является делителем (B, Σ), а Γ не является делителем H. В противном случае имеем неразложимый (в сплетение) автомат. Ранее было дано определение неразложимого (в треугольное произведение) автомата. Объединяя эти два понятия, будем говорить просто о неразложимом автомате.

Предположение. Линейный автомат (A, Γ), Γ — вполне 0-простая полугруппа, неразложим тогда и только тогда, когда (A, Γ) — простой групповой автомат.

Доказательство. Пусть (A, Γ) — неразложимый автомат. Тогда, по лемме 2, (A, Γ) — неприводимое представление. Согласно лемме 8 полугруппа Γ является группой. Если группа не является простой, то в силу леммы 9 автомат (A, Γ) является разложимым. Следовательно, Γ — простая группа.

Обратно, пусть (A, Γ) — простой групповой автомат. Так как (A, Γ) — неприводимое представление, то из леммы 2 следует, что (A, Γ) неразложим в треугольное произведение.

Пусть теперь (A, Γ) разложи́м в сплетение, т. е. имеет место

$$(A, \Gamma) \prec (B, \Sigma) \operatorname{wr} (X, H)$$

и (A, Γ) не делит (B, Σ), Γ не делит H. Так как $(A, \Gamma) \prec (B, \Sigma) \times \times \operatorname{wr}(X, H)$, то в $(B \otimes KX,\ \Sigma^X \rightthreetimes \Gamma)$ найдется подавтомат (C, Φ) такой, что имеется эпиморфизм μ: $(C, \Phi)^\mu = (A, \Gamma)$. Рассмотрим $\Phi_1 = \Phi \cap \Sigma^X$. Так как $\Sigma^X \lhd (\Sigma^X \rightthreetimes H)$, то $\Phi_1 \lhd \Phi$. Далее, Φ_1^μ — нормальный делитель в $\Phi^\mu = \Gamma$, и в силу простоты Γ возможны два случая: 1) $\Phi_1^\mu = \Gamma$; 2) $\Phi_1^\mu = 1$.

1. Пусть $\Phi_1^\mu = \Gamma$. Тогда имеем $(C, \Phi_1)^\mu = (A, \Gamma)$, или, другими словами, $(A, \Gamma) \prec (B \otimes KX, \Sigma^X)$. Покажем, что отсюда следует $(A, \Gamma) \prec (B, \Sigma)$. X будем считать конечным множеством (что для автоматов является естественным, но, вообще говоря, не обязательным требованием). Перепишем

$$(B \otimes KX, \Sigma^X) = \Big(\oplus \sum_{x \in X} (B \otimes x),\ \prod_i \Sigma\Big),\ i = 1, \ldots, k,\ \ k = |X|.$$

Действие группы $\prod_i \Sigma$ является покомпонентным. Выведем требуемое утверждение из следующего, более общего факта.

Пусть $(D, G) = \prod_i (B_i, \Sigma_i) = (\oplus \sum_i B_i,\ \prod_i \Sigma_i)$, $i = 1, \ldots, k$, $k = |x|$, и $(A, \Gamma) \prec (D, G)$. Тогда если (A, Γ) — неприводимый точный автомат, то (A, Γ) делит одно из слагаемых. Если положить здесь $B_i = B$, $\Sigma_i = \Sigma$, то как раз получим, что $(A, \Gamma) \prec (B, \Sigma)$ (точность автомата по определению делителя не важна).

Возьмем $(C, \Phi) \subset (D, G)$ такой, что $(C, \Phi)^\mu = (A, \Gamma)$. Тогда $(A, \Gamma) \simeq (C/C_0, \Phi/\Phi_0)$, где (C_0, Φ_0) — ядро эпиморфизма μ. Обозначим $D_1 = B_1$, $D_2 = B_1 \oplus B_2, \ldots, D_n = (B_1 \oplus \ldots \oplus B_n) = D$. Имеем ряд Φ-модулей

$$0 \subset D_1 \subset \ldots \subset D_n = D,$$

факторы которого изоморфны B_i.

Проведем через $C_0 \subset C$ некоторый другой ряд из Ф-инвариантных подпространств. Так как Ф действует в C/C_0 неприводимо, то, по теореме Жордана—Гельдера, C/C_0 изоморфен фактору некоторого B_i (изоморфизм Ф-модулей). Пусть $G_0 = \prod_{j \neq i} \Sigma_j$. В силу покомпонентного действия G_0 лежит в ядре (B_i, G) и, следовательно, $G_0 \cap \Phi$ лежит в ядрах (B_i, Φ) и $(C/C_0, \Phi)$.

Далее, $(B_i, G/G_0) \simeq (B_i, \Sigma_i)$. Но имеем

$$(B_i, \Sigma_i) \simeq (B_i, G/G_0) \supset (B_i, \Phi G_0/G_0) \simeq (B_i, \Phi/\Phi \cap G_0).$$

Так как $(A, \Gamma) = (C/C_0, \Phi/\Phi_0)$ — точный, то ядро $(C/C_0, \Phi)$ равно Φ_0. Поэтому $G_0 \cap \Phi \subset \Phi_0$. Теперь уже можно построить сквозной эпиморфизм, из которого следует требуемое утверждение

$$(C, \Phi/\Phi \cap G_0) \to (C/C_0, \Phi/\Phi_0) \simeq (A, \Gamma).$$

Итак, получили $(A, \Gamma) \prec (B, \Sigma)$, что противоречит неразложимости (A, Γ).

2. Пусть $\Phi_1{}^{\mu} = 1$. Но тогда

$$H \simeq H\Sigma^{\chi}/\Sigma^{\chi} \supset \Sigma^{\chi}\Phi/\Sigma^{\chi};\ (\Sigma^{\chi}\Phi/\Sigma^{\chi})^{\mu} \simeq (\Phi/\Sigma^{\chi} \cap \Phi)^{\mu} \simeq (\Phi/\Phi_1)^{\mu} = \Gamma,$$

т. е. $\Gamma \prec H$, что также противоречит неразложимости автомата (A, Γ).

Таким образом, все линейные сомножители разложения из теоремы 2 являются уже неразложимыми автоматами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебраическая теория автоматов, языков и полугрупп. М., Статистика, 1975. 334 с.
2. Кальюлайд У. Э. Замечания о многообразиях представлений полугрупп и линейных автоматов. — Учен. зап. Тарт. гос. ун-та, 1977, № 431, с. 47—67.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. М., Мир, 1972, т. 1. 285 с.
4. Перанидзе И. Н. Треугольное умножение в теории биавтоматов. — Тр. Тбил. ун-та. Математика. Механика. Астрономия, 1981, т. 12, с. 198—229.
5. Плоткин Б. И. Многообразия представлений групп. — Усп. мат. наук, 1977, т. 32, № 5, с. 3—68.
6. Финкельштейн М. Я. О декомпозиции линейных автоматов. — В кн.: Алгебры, группы и модули. Томск, 1980, с. 109—125.
7. Eilenberg S. Automata, languages and machines. New York—San Francisco—London, Acad. Press, 1976, vol. B. 400 p.

ВНИИводполимер *Поступила 24.02.1981*