Аксиоматическое определение колец с малыми сокращениями

А. Аткарская [a] А. Канель-Белов [b] Е. Плоткин [c] Э. Рипс [d]

[a] *Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan 5290002, Israel and Department of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Givat Ram, 9190401 Jerusalem, Israel*

[b] *Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan 5290002, Israel; Department of Discrete Mathematics, Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudnyi, Institutskiy Pereulok, 141700 Moscow Oblast, Russia; College of Mathematics and Statistics, Shenzhen University, Shenzhen 518061, China*

[c] *Department of Mathematics, Bar-Ilan University, Ramat Gan 5290002, Israel*

[d] *Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Givat Ram, 9190401 Jerusalem, Israel*

Памяти Сергея Ивановича Адяна, чья первопроходческая деятельность является постоянным источником математического вдохновения

Ключевые слова: кольцо с малыми сокращениями, поворот, мульти-поворот, задание кольца образующими и определяющими соотношениями, группа с малыми сокращениями, групповая алгебра.

В данной статье развивается теория малых сокращений для ассоциативных алгебр с базисом из обратимых элементов, заданных образующими и определяющими соотношениями. А именно, изучаются фактор-алгебры групповой алгебры свободной группы, вводятся три аксиомы для определяющих соотношений, которые выражают свойство малых сокращений для колец. Мы показываем, что такое кольцо нетривиально. Мы будем называть его *кольцом с малыми сокращениями*.

УДК 512.555, 512.543

1. Введение

В данной работе приводится аксиоматическое определение кольца с малыми сокращениями, заданного образующими и определяющими соотношениями. Формулируется теорема о нетривиальности кольца с малыми сокращениями (см. Теорема 1). Полное доказательство этого результата занимает около 300 страниц и его предварительное изложение представлено в препринте [3].

Email addresses: `atkarskaya.agatha@gmail.com` (А. Аткарская), `kanelster@gmail.com` (А. Канель-Белов), `plotkin.evgeny@gmail.com` (Е. Плоткин), `eliyahu.rips@mail.huji.ac.il` (Э. Рипс).

2. Описание проблемы

Следующий вопрос представляет несомненный интерес:

Если взаимодействия между определяющими соотношениями являются слабыми в определенном смысле, будет ли полученная алгебра обладать некоторыми свойствами свободной алгебры?

В случае групп, полугрупп и моноидов Теория Малых Сокращений дает положительный ответ (см. детали в [10], [17]). Однако построение такой теории для систем с несколькими операциями сталкивается со значительными трудностями. Общая теория ассоциативных колец с базисом из обратимых элементов, представленная в этой статье, была построена после изучения частного случая, который рассмотрен в [2]. Теорема 3 показывает, что кольцо, введенное в работе [2], является частным примером кольца с малыми сокращениями. Его конструкция представляет собой первый шаг процесса построения конечно порожденного тела (соответствующую проблему поставил, в частности, А. Г. Курош), причем здесь ситуация по сравнению с групповым случаем глубоко нетривиальна.

Наша мотивация исходит из того факта, что теория групп с малыми сокращениями и, особенно, итерированная теория групп с малыми сокращениями (построенная Новиковым и Адяном при решении проблемы Бернсайда) играет главную роль в решении многих классических задач теории групп. Эта теория обеспечивает мощный метод построения групп с необычными и даже экзотическими свойствами, такими как, например, бесконечные бернсайдовские группы [12], [1], [15], [8], [11], [4], монстр Тарского [14], конечно порожденные бесконечные делимые группы [7] и многие другие [13]. Актуальной является разработка аналогичного метода в теории колец в целях контроля над соотношениями. Мы имеем в виду, что многие объекты строятся с помощью естественных, в рамках здравого смысла, систем соотношений. Трудности заключаются в том, чтобы не было лишних следствий этих соотношений, в частности объект не стал тривиальным. Мы ожидаем, что предлагаемое понятие может быть исользовано, например, для построения конечно порожденного тела, а также аналога монстра Тарского и обобщения теоремы Бергмана о централизаторе, в том числе и для групповой алгебры свободной группы.

Классический метод Новикова – Адяна решения проблемы Бернсайда [12], [1] (а также построения монстра Тарского – группы порожденной любыми двумя своими некоммутирующими элементами) опирается на сложную индукцию по рангу с большим количеством индуктивных предположений. Движущей силой этого метода является то обстоятельство, что различные периодические слова одного ранга с периодами схожей длины имеют малую общую часть. Более того, соотношения одного ранга после специального приведения мало взаимодействуют друг с другом по модулю возможных преобразований младших рангов. Это соответствует обобщенному условию малых сокращений, что позволяет сделать шаг индукции. Отметим, что понятие *поворота в данном ранге* используемое в работе Новикова и Адяна, послужило отправной точкой для нашего базового понятия *мультиповорота* (смотри определение в параграфе 3.2 данной статьи, также в работах [2], [3]).

Аналогичные трудные проблемы хорошо известны и в теории колец, однако соответствующего универсального подхода для них пока не существует. Мы предполагаем, что итерирование нашей конструкции подобно тому как это делается при решении проблемы Бернсайда даст искомый метод для построения колец и ассоциативных алгебр с заданными свойствами. Данная работа соответствует случаю малых сокращений, т.е. случаю когда ранг только один. В частности наша конструкция может быть первым шагом в построении конечно-порожденного тела.

В настоящее время неизвестно, как с ассоциативным кольцом связать геометрический объект. Программу Громова "Группы как геометрические объекты" [5], см. также [6] предваряет комбинаторный подход. В групповом случае комбинаторным объектом отвечающим гиперболической группе является группа с малыми сокращениями (если каждое соотношение представляется произведением не менее 7 малых кусков). Мы надеемся построить определение "гиперболического кольца", начиная с рассматриваемых в настоящей работе колец с малыми сокращениями. Если будет дано определение гиперболического кольца, то, по всей видимости, рассматриваемые нами в этой статье кольца с малыми сокращениями будут такими кольцами. Мы предполагаем, что другим частным случаем должны стать групповые кольца гиперболических групп.

Естественно предположить, что при надлежащем определении кручения в кольцевом случае, построенные кольца без кручения должны иметь малую когомологическую размерность и одномерные централизаторы элементов, обладать свойством неаменабельности, и иметь положительное решение проблемы Капланского о делителях нуля. Развитие итеративной теории малых сокращений может быть полезно, в частности, для решения классической проблемы построения конечно порожденного тела.

Отметим, что подход А. Смоктунович к контролю за соотношениями в кольцах привел к построению простого ниль-кольца и других важных примеров ниль-алгебр, см., например, [18], [9]. Этот подход основан на идеях, отличных от наших, и не связан с теорией малых сокращений.

3. Аксиомы малых сокращений для колец

3.1. *Группы с малыми сокращениями*

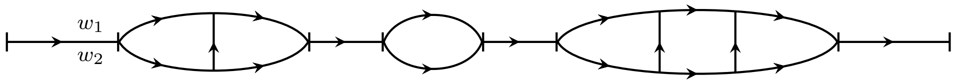
Рассмотрим группу G заданную образующими и определяющими соотношениями $G = \langle X \mid \mathcal{R}\rangle$. Мы предполагаем, что множество определяющих соотношений $\mathcal{R}$ замкнуто относительно циклических перестановок и взятия обратных и все элементы из $\mathcal{R}$ являются циклически редуцированными. Взаимодействие между определяющими соотношениями определяется в терминах малых кусков. Слово s называется *малым куском* по отношению к множеству $\mathcal{R}$ (в обобщенном групповом смысле, смотри [16], [10]) если существуют соотношения вида sr_1 и sr_2 в $\mathcal{R}$ такие, что $r_1r_2^{-1} \neq 1$ и $r_1r_2^{-1}$ не сопряжен соотношению из $\mathcal{R}$ в соответствующей свободной группе, даже после сокращений.

Замечание 3.1 *Геометрически малые куски можно рассматривать как слова, которые могут появиться на общей границе между двумя клетками в диаграмме Ван Кампена [13], [10]. В частности, если $r_1r_2^{-1} \in \mathcal{R}$, то мы можем заменить эти клетки одной клеткой. Поэтому с самого начала мы предполагаем, что $r_1r_2^{-1} \notin \mathcal{R}$.*

Условие *малых сокращений* $C(p)$ означает, что каждое соотношение в $\mathcal{R}$ не может быть записано как произведение менее чем p малых кусков. Для большинства целей семи малых кусков достаточно, поскольку при условии $C(7)$ дискретная Эйлерова характеристика становится отрицательной [10]. Чтобы гарантировать это, мы можем предположить, что длина любого малого куска меньше одной шестой длины соотношения, в котором он появляется. Основная теорема Теории Малых Сокращений может быть сформулирована так:

Пусть w_1, w_2 два слова которые не содержат вхождений более половины соотношений из $\mathcal{R}$. Они представляют один и тот же элемент из G тогда и только тогда когда они могут быть соединены однослойной диаграммой ([10], Лемма Гриндлингера). (В частности, группа с малыми сокращениями нетривиальна.) Переход от w_1 к w_2 может быть представлен в виде последовательности элементарных шагов, называемых *поворотами* [12]. Каждый поворот поворачивает ровно одну клетку.

Для удобства читателя ниже мы приводим пример однослойной диаграммы, где слово w_1 читается на ее верхней стороне, слово w_2 — на нижней стороне, а клетки — это групповые соотношения из списка $\mathcal{R}$.



3.2. *Основные определения для колец*

Пусть k поле. Мы будем использовать малые греческие буквы для ненулевых элементов поля k. Пусть $\mathcal{F}$ – свободная группа, свободно порожденная алфавитом S. Элементы $\mathcal{F}$ называются *мономами или словами.* Обозначим через $k\mathcal{F}$ групповую алгебру. Элементы $k\mathcal{F}$ называются *полиномами.* Пусть $a, b \in \mathcal{F}$, Через $a \cdot b$ обозначаем их произведение. Мы пишем ab если между a и b нет сокращений.

Пусть фиксирован конечный или бесконечный набор полиномов $\mathcal{R}$ из $k\mathcal{F}$:

$$\mathcal{R} = \left\{ p_i = \sum_{j=1}^{n(i)} \alpha_{ij} m_{ij} \mid \ \alpha_{ij} \in k, m_{ij} \in \mathcal{F}, i \in I \right\}.$$

Мы предполагаем, что мономы m_{ij} являются редуцированными, полиномы p_i – аддитивно редуцированными, I – некоторое множество индексов, все коэффициенты α_{ij} ненулевые.

Обозначим через $\langle \mathcal{R} \rangle$ идеал, порожденный как идеал набором $\mathcal{R}$. Обозначим множество всех мономов m_{ij} из $\mathcal{R}$ через $\mathcal{M}$.

Целью настоящей работы является определение класса колец с малыми сокращениями. Такое кольцо мы будем представлять в виде $\mathcal{A} = k\mathcal{F}/\langle \mathcal{R} \rangle$ и наше определение будем формулировать в виде трех условий (аксиом) на $\mathcal{R}$ (набор соотношений) и будем считать $\mathcal{R}$ фикированными.

Условие 1 (Аксиома Совместимости) *(i) Если $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$, то $\beta p = \sum_{j=1}^{n} \beta \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$ для любого $\beta \in k, \beta \neq 0$.*

(ii) Пусть $x \in S \cup S^{-1}$, где S – алфавит, свободно порождающий $\mathcal{F}$, $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$. Предположим, что x^{-1} начальный символ какого-то m_i. Тогда,

$$x \cdot p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x \cdot m_j \in \mathcal{R}$$

(после сокращений в мономах xm_j). Мы требуем, чтобы аналогичное условие выполнялось также, если x^{-1} – последний символ монома и умножение на x в последнем равенстве – с правой стороны.

Из второго условия Аксиомы Совместимости немедленно следует, что множество $\mathcal{M}$ замнуто относительно взятия подслов. В частности, пустое слово всегда принадлежит $\mathcal{M}$.

Определим понятие *малого куска* относительно $\mathcal{R}$ в алгебре $k\mathcal{F}$. Оно играет центральную роль в нашей теории:

Определение 3.1 *Пусть $c \in \mathcal{M}$. Предположим существуют два полинома*

$$p = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j a_j + \alpha a \in \mathcal{R}, \qquad q = \sum_{j=1}^{n_2} \beta_j b_j + \beta b \in \mathcal{R},$$

такие что c является подсловом в a и в b, т.е.

$$a = \widehat{a}_1 c \widehat{a}_2, \qquad b = \widehat{b}_1 c \widehat{b}_2,$$

где $\widehat{a}_1$, $\widehat{a}_2$, $\widehat{b}_1$, $\widehat{b}_2$ возможно являются пустыми. Предположим, что

$$\widehat{b}_1 \cdot \widehat{a}_1^{-1} \cdot p = \widehat{b}_1 \cdot \widehat{a}_1^{-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j a_j + \alpha \widehat{a}_1 c \widehat{a}_2 \right) = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j \widehat{b}_1 \cdot \widehat{a}_1^{-1} \cdot a_j + \alpha \widehat{b}_1 c \widehat{a}_2 \notin \mathcal{R}$$

(*даже после сокращений*), *или*

$$p \cdot \widehat{a}_2^{-1} \cdot \widehat{b}_2 = \left(\sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j a_j + \alpha \widehat{a}_1 c \widehat{a}_2 \right) \cdot \widehat{a}_2^{-1} \cdot \widehat{b}_2 = \sum_{j=1}^{n_1} \alpha_j a_j \cdot \widehat{a}_2^{-1} \cdot \widehat{b}_2 + \alpha \widehat{a}_1 c \widehat{b}_2 \notin \mathcal{R}$$

(*даже после сокращений*). *Тогда моном* c *называется малым куском.*

Обозначим множество всех малых кусков через $\mathcal{S}$. Ясно, что $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$. Из определения следует, что множество $\mathcal{S}$ замкнуто относительно взятия подслов. В частности, если множество $\mathcal{S}$ непусто, пустое слово всегда будет малым куском. Если набор $\mathcal{S}$ оказался пустым, то *мы все равно полагаем пустое слово малым куском.*

Пусть $u \in \mathcal{M}$. Тогда или $u = l_1 \cdots l_m$, где $l_1, \ldots, l_m$ малые куски, или u не может быть представлено как произведение малых кусков. Введем меру на мономах из $\mathcal{M}$ (Λ-*мера*). *Будем говорить,* что $\Lambda(u) = m$ *если* u *может быть представлен как произведение малых кусков и минимальное возможное число малых кусков в таком представлении равняется* m. *Будем говорить, что* $\Lambda(u) = \infty$, *если* u *не может быть представлен как произведение малых кусков.*

Зафиксируем константу $\tau \in \mathbb{N}$, $\tau \geqslant 10$.

Условие 2 (Аксиома Малых Сокращений с условием τ)

Предположим, что $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{R}$ *и линейная комбинация* $\sum\limits_{s=1}^{n} \gamma_s p_s$ *является ненулевой после приведения подобных членов.*

Тогда существует моном a *в* $\sum\limits_{s=1}^{n} \gamma_s p_s$ *с ненулевым коэффициентом после приведения подобных членов такой, что*

– *или* a *не может быть представлен как произведение малых кусков,*
– *или каждое представление* a *в качестве произведения малых кусков содержит, по крайней мере,* $\tau + 1$ *малых кусков.*

То есть, $\Lambda(a) \geqslant \tau + 1$, *включая* $\Lambda(a) = \infty$.

Определение 3.2 *Пусть* $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j \in \mathcal{R}$. *Будем называть мономы* a_{j_1}, a_{j_2}, $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n$, *инцидентными мономами* (*включая случай* $a_{j_1} = a_{j_2}$). *Напомним, что* $\alpha_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Теперь мы вводим последнее условие, называемое *Аксиомой Изоляции.* В отличие от двух предыдущих аксиом это полностью теоретико-кольцевое условие. В нем мы используем понятие *максимального вхождения* монома из $\mathcal{M}$ и понятие *перекрытия вхождений.*

Мы рассматриваем вхождения $a \in \mathcal{M}$ в слово U, то есть $U = LaR$, где L, R могут быть пустыми. Под *максимальным вхождением* мы понимаем вхождение монома из $\mathcal{M}$, которое не содержится в большем таком вхождении. Отметим, что общая часть двух максимальных вхождений всегда является малым куском.

Перекрытие вхождений определяется как общая часть двух вхождений.

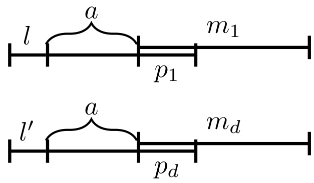
Третья аксиома накладывает некоторые естественные ограничения на рассматриваемые кольца. Мы выбрали ее наиболее слабую форму, чтобы охватить наиболее широкий класс колец, что существенно усложнило определение.

Условие 3 (Аксиома Изоляции, левая, с условием τ) *Пусть* $m_1, m_2, \ldots, m_d$ *любая последовательность мономов из* $\mathcal{M}$ *такая, что* $m_1 \neq m_d$, $\Lambda(m_i) \geqslant \tau - 2$ *для всех* $i = 1, \ldots, d$

мономы m_i *и* m_{i+1} *инцидентны для всех* $i = 1, \ldots, d - 1$,

и $a \in \mathcal{M}$ *любой моном со следующими свойствами:*

1. $\Lambda(a) \geqslant \tau - 2$;
2. $am_1, am_d \notin \mathcal{M}$, am_1, am_d *не имеют сокращений;*
3. m_1 *максимальное вхождение в* am_1, m_d *максимальное вхождение в* am_d.
4. *если* ap_1 *максимальное вхождение в* am_1, *которое содержит* a, ap_d *максимальное вхождение в* am_d *которое содержит* a,*то существуют мономы* l, $l' \in \mathcal{M}$ *такие, что*
   · l, l' *– малые куски;*
   · $la, l'a \in \mathcal{M}$, la, $l'a$ *не имеют сокращений;*
   · *существует последовательность мономов* $b_1, \ldots, b_n$ *из* $\mathcal{M}$ *таких, что* $b_1 = lap_1$, $b_n = l'ap_d$, *для всех* $i = 1, \ldots, n-1$ *мономы* b_i, b_{i+1} *инцидентны, и* $\Lambda(b_i) \geqslant \tau - 2$.



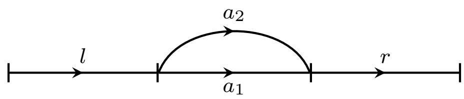
Тогда ${p_1}^{-1} \cdot m_1 \neq {p_d}^{-1} \cdot m_d$.
Правая Аксиома Изоляции с условием τ формулируется симметрично.
Определение 3.3 *Будем говорить, что* $\mathcal{A} = k\mathcal{F}/\langle\mathcal{R}\rangle$ *есть* $C(\tau)$-кольцо с малыми сокращениями, *если оно удовлетворяет Аксиоме Совместимости, Аксиоме Малых Сокращений с условием* τ *и по крайней мере одной из Аксиом Изоляции с условием* τ.

Если дана группа $G = \langle X \mid \mathcal{R}\rangle$ и $m = pq \in \mathcal{R}$, $w = lpr$, тогда преобразование $w = lpr \mapsto lq^{-1}r = w'$ называется *поворотом.*

Мы заменяем понятие группового поворота следующим понятием кольцевого мульти-поворота. Возьмем $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$, где все $\alpha_j \neq 0$. Предположим, что v — это моном вида $v = lm_h r$ для некоторого h, $1 \leqslant h \leqslant n$. Переход от $v = lm_h r$ к $\sum_{j=1, j\neq h}^{n} (-\alpha_h^{-1}\alpha_j) lm_j r$ называется *мульти-поворотом.* Это преобразование продолжается линейно на βv, а затем линейно на все полиномы, содержащие мономы вида βv. Соответствующий полином $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j lm_j r$ называется *раскладкой данного мульти-поворота.*

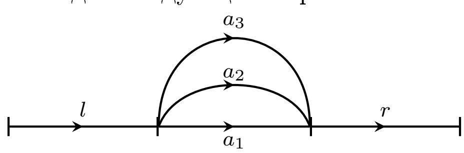
Примеры. В данных примерах для простоты рассматривается групповая алгебра над полем из двух элементов.

A. Предположим $v = la_1 r$ и берется полином $a_1 + a_2 \in \mathcal{R}$. В этом случае мы получаем переход от $la_1 r$ к $la_2 r$ в результате соответствующего мульти-поворота (смотрите рисунок ниже)

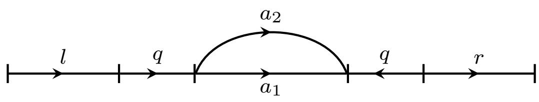


Переход от $la_1 r$ к $la_2 r$ показывает, что поворот можно рассматривать в качестве частного случая мульти-поворота.

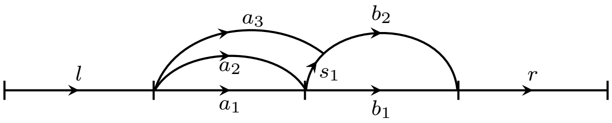
B. Предположим $v = la_1 r$ и берется полином $a_1 + a_2 + a_3 \in \mathcal{R}$. Тогда мы получаем переход от $la_1 r$ к $la_2 r + la_3 r$. Графически это выглядит следующим образом



C. Предположим $v = lqa_1 q^{-1} r$ и берется полином $a_1 + a_2 + 1 \in \mathcal{R}$. Тогда соответствующий мульти-поворот — это переход от $lqa_1q^{-1}r$ к $lqa_2q^{-1}r + l \cdot r$. Заметим, что поле замены a_1 на 1, подслово q сокращается с подсловом q^{-1}. Результат имеет следующий вид (пустое слово 1 не отражено на рисунке):



D. Предположим $v = la_1b_1r$ и берутся следующие полиномы $a_1+a_2+a_3s_1^{-1}$ и b_1+b_2+1 из $\mathcal{R}$. Тогда имеются два соседних мульти-поворота: a_1 заменяется на $a_2+a_3s_1^{-1}$ и b_1 заменяется на s_1b_2+1. Это отражено на следующем рисунке:



Предположим, что сначала выполняется мульти-поворот слева, а затем мульти-поворот справа. Тогда la_1b_1r заменяется на $la_2b_1r + la_3s_1^{-1}b_1r$, а затем результат заменяется на $la_2s_1b_2r + la_2 \cdot r + la_3b_2r + la_3s_1^{-1} \cdot r$. При этом в мономах la_2r и $la_3s_1^{-1}r$ могут возникнуть сокращения. Теперь предположим, что сначала выполняется мульти-поворот справа, а затем мульти-поворот слева. Тогда la_1b_1r заменяется на $la_1s_1b_2r + la_1 \cdot r$, а затем результат заменяется на $la_2s_1b_2r + la_3b_2r + la_2 \cdot r + la_3s_1^{-1} \cdot r$ и производятся сокращения в необходимых местах. Заметим, что требуется изменить второй мульти-поворот, чтобы приметить его. Также заметим, что итоговый результат на зависит от порядка выполнения мульти-поворотов.

Данные выше примеры позволяют увидеть, что, в отличие от групп, в кольцах в результате мульти-поворотов возникают новые эффекты.

Определим следующее векторное пространство ассоциированное с данным мономом и набором мульти-поворотов. Сначала рассмотрим моном $v = lm_hr$ и один мульти-поворот, порожденный полиномом $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j \in \mathcal{R}$. Тогда соответствующее пространство линейно порождается мономами lm_jr, $j = 1, \dots, n$ (после возможных сокращений) с линейной зависимостью $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j lm_jr$. Теперь рассмотрим моном v и несколько мульти-поворотов. Тогда соответствующее пространство линейно порождается v и всеми мономами, которые получаются из него при помощи данных мульти-поворотов, с линейными зависимостями равными раскладкам данных мульти-поворотов.

Рассмотрим определенное выше векторное пространство, которое возникает в последнем примере D. В примере D имеются следующий мономы:

$$la_1b_1r, \quad la_2b_1r, \quad la_3s_1^{-1}b_1r,$$
$$la_1s_1b_2r, \quad la_2s_1b_2r, \quad la_3b_2r,$$
$$la_1 \cdot r, \quad la_2 \cdot r, \quad la_3s_1^{-1} \cdot r$$

и линейные зависимости между ними:

$$la_1b_1r + la_2b_1r + la_3s_1^{-1}b_1r = 0,$$
$$la_1s_1b_2r + la_2s_1b_2r + la_3b_2r = 0,$$
$$la_1 \cdot r + la_2 \cdot r + la_3s_1^{-1} \cdot r = 0,$$
$$la_1b_1r + la_1s_1b_2r + la_1 \cdot r = 0,$$
$$la_2b_1r + la_2s_1b_2r + la_2 \cdot r = 0,$$
$$la_3s_1^{-1}b_1r + la_3b_2r + la_3s_1^{-1} \cdot r = 0.$$

Заметим, что последний полином является суммой предыдущих. Таким образом, у нас имеется 5 линейных зависимостей (а на 6). Следовательно, итоговое векторное пространство имеет размерность не меньше четырех (так как у нас девять попарно различных порождающих мономов). Заметим, что в случае групп, соответствующее векторное пространство всегда одномерно, то есть данный эффект вырождается (смотри диаграмму в конце пункта 3.1).

4. Основные теоремы

Теорема 1 *Кольцо с малыми сокращениями всегда нетривиально.*

Приведем примеры колец с малыми сокращениями.

Теорема 2 *Групповая алгебра группы с малыми сокращениями, удовлетворяющей условию $C(p)$ для $p \geqslant 22$, является кольцом с малыми сокращениями.*

Пусть $\mathbb{Z}_2\mathcal{F}$ есть групповая алгебра над полем $\mathbb{Z}_2$ свободной группы $\mathcal{F}$ с не менее чем четырьмя образующими. Пусть, далее, $w \in \mathcal{F}$ – моном, $|w|$ – его длина, при этом $w \in \mathcal{F}$ не начинается и не заканчивается ни на одну из букв x, x^{-1}, y, y^{-1}. Возьмем натуральные числа m и n так, что $|w| \ll m \ll n$ и моном $v \in \mathcal{F}$:

$$v = x^m y x^{m+1} y \cdots x^{n-1} y$$

(где знак $\ll$ означает "существенно меньше").

Пусть $\mathcal{R}$ состоит из тринома $1 + v + vw$, $\mathcal{A} = k\mathcal{F}/\langle\mathcal{R}\rangle$. Имеет место следующая

Теорема 3 *Кольцо $\mathcal{A}$ является кольцом с малыми сокращениями.*

Замечание 4.1 *В алгебре $\mathcal{A}$ элемент $1 + w$ обратим, ибо $v \in \mathcal{F}$ обратим и если $1 + v + vw = 0$, то $v(1 + w) = (1 + w)v = 1$. Построение конечно порожденного тела осуществляется с помощью итерирования следующей процедуры: берется моном w, по нему строится моном v и соотношение $1 + v + vw = 0$. В пределе оказывается, что сумма любых двух мономов либо нулевая (тогда они отвечают одному и тому же элементу алгебры) либо равна третьему моному (тогда она обратима). Тем самым строится конечно порожденное тело (не только как кольцо, но и как полугруппа). Трудность состоит в доказательстве нетривиальности получившегося кольца. Весьма нетривиальная Теорема 3 означает возможность осуществить первый шаг этой процедуры.*

5. Благодарности

Исследования первого и третьего авторов были поддержаны грантом ISF 1994/20 и Исследовательским институтом математики им. Эмми Нётер. Исследования первого и четвертого авторов также поддержаны стипендией ISF. Работа второго автора поддержана Российским научным фондом, грант 17-11-01377. Авторы очень благодарны Б.Э.Кунявскому и А.Л.Семенову за важные и полезные обсуждения в ходе подготовки работы к печати. Мы также признательны рецензенту за внимательное чтение текста и ценные замечания, которые существенно повлияли на окончательную редакцию статьи.

References

[1] S. I. Adian, *The Burnside problem and identities in groups,* Nauka, Moscow, 1975 , 335 pp.

[2] A. Atkarskaya, A. Kanel-Belov, E. Plotkin, E. Rips, *Construction of a quotient ring of Z_2F in which a binomial $1 + w$ is invertible using small cancellation methods*, in "Groups, Algebras, and Identities" AMS, Contemporary Mathematics, **726** (2019), Israel Mathematical Conferences Proceedings, 1–76.

[3] [AKPR1] A. Atkarskaya, A. Kanel-Belov, E. Plotkin, E. Rips, *Group-like Small Cancellation Theory for Rings*, Arxiv: 02836v1 [math.RA], (2020) 273 pp.

[4] R. Coulon. *On the geometry of Burnside quotients of torsion free hyperbolic groups*, International Journal of Algebra and Computation, **24(3)** (2014) 251-–345.
381–384.

[5] M. Gromov, *Infinite groups as geometric objects*, Proc. Int. Congress Math., Warsaw, 1983, Amer. Math. Soc., **1** (1984), 385–392.

[6] M. Gromov, *Hyperbolic Groups*, "Essays in Group Theory" (G. M. Gersten, ed.), **8** (1987), MSRI Publ., Springer, New York, 75–263.

[7] V. Guba, *Finitely generated complete groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **50** (1986), 883-–924.

[8] S. Ivanov, *The free Burnside groups of sufficiently large exponents*, Internat. J. Algebra Comput. **4** (1994), no. 1-2, ii+308pp.

[9] T. Lenagan, A. Smoktunowicz, *An infinite dimensional affine nil algebra with finite Gelfand-Kirillov dimension*, J. Amer. Math. Soc. **20**, No. 4, (2007), 989–1001.

[10] R. Lyndon, P. Schupp, *Combinatorial group theory. Reprint of the 1977 edition*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.(2001).

[11] I. Lysenok (1996). *Infinite Burnside groups of even exponent.* Izv. Math. **60:3** (1996), 453-–654.

[12] P.S. Novikov, S.I. Adian, *Infinite periodic groups*, Izvestia Akademii Nauk SSSR. Ser. Mat., **32** (1968), no. 1, 212—244, **32** (1968), no. 2, 251—524, **32** (1968), no. 3, 709—731.

[13] A. Olshanskii, *Geometry of defining relations in groups. Translated from the 1989 Russian original by Yu. A. Bakhturin*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, **70** (1991).

[14] A. Olshanskii, *An infinite group with subgroups of prime orders*, Math. USSR Izv. **16** (1981), 279—289; translation of Izvestia Akad. Nauk SSSR Ser. Matem. **44** (1980), 309-–321.

[15] A. Olshanskii, *Groups of bounded period with subgroups of prime order*, Algebra and Logic, **21** (1983), 369–418; Translation of Algebra i Logika **21** (1982), 553–618.

[16] E. Rips, *Generalized small cancellation theory and applications I. The word problem*, Israel J. Math. **41** (1982), 1–146.

[17] M. Sapir, Combinatorial algebra: syntax, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Cham, 2014, 355 pp.

[18] A. Smoktunowicz, *A simple nil ring exists*, Communications Algebra, No. 1, (2002) 27–59.