ОЧЕРК ИСТОРИИ УНИВЕРСАЛЬНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Б.Плоткин, А.Гварамия, Е.Плоткин

Аннотация. В данной работе дается очерк развития универсальной алгебраической геометрии и логической геометрии. Эта тематика систематически развивалась в работах Б.И. Плоткина и его учеников начиная с 1996-го года. Параллельная теория был построена В.Н.Ремесленниковым, А.Г.Мясниковым и другими. Приводится пример возникновения проблем на базе универсальной алгебраической геометрии, обсуждается состояние вопроса с открытой проблемой изоморфизма изотипных конечно порожденных групп.

1. Вспоминает Борис Плоткин

1.1. **Универсальная алгебраическая геометрия.** Идея универсальной алгебраической геометрии возникла таким образом. В середине 90-х годов я присутствовал на алгебраическом семинаре в Иерусалиме (ныне семинар Шимшона Амицура) на докладе Цлиля Села. Доклад был посвящен геометрическим идеям и методам, связанным с путями решения проблемы Тарского.

Эта теоретико-модельная проблема оставалась открытой с конца 40-х годов. Ее смысл состоит в том, можно ли различить две свободные не абелевы группы с помощью сравнения их элементарных теорий.

Доклад был посвящен тому, что ответ на эту проблему кроется в узучении решений систем уравнений над свободной группой. Другими словами, проблема имеет геометрическую природу, поскольку возникает геометрический объект - решение систем уравнений. К тому времени такая теория была построена в Москве Маканиным-Разборовым. О ней мне рассказал Илья Рипс. Он был убежден, что она приведет к решению различных проблем теоретико-модельного характера и даст начало новой теории моделей на базе свободной группы.

В докладе Цлиля Села прозвучали важные слова, которые меня очень заинтересовали. Речь идет о таких понятиях как идеал, радикал, нульстеллензатц, и все это по отношению к свободной группе.

После доклада я еще беседовал с Ильей Рипсом, и у меня постепенно возникло ощущение, что все эти понятия при подходящей технике можно ввести для произвольной группы и даже для произвольной алгебры. Автобус из Иерусалима в Тель-Авив идет около часа. За это время неясные вначале мысли сформировались в виде вполне конкретных понятий. На обратном пути я заехал в Бар-Илан и рассказал о них Жене и другим алгебраистам. Это было началом работы над новой темой, которая впоследствии получила название универсальная алгебраическая геометрия.

Итак, довольно быстро стало понятно, что рассмотрение теории решений систем уравнений над произвольными алгебрами дает возможность собрать под одной крышей три связанные воедино науки: алгебру, геометрию, теорию моделей. Такое сочетание показалось мне крайне перспективным. В качестве тестового примера явилась теорема Гильберта, известная как Nullstellensatz. По сути в ней идет речь о том, как характеризовать все следствия, выводимые из данной системы уравнений. Другими словами, у нас имеется система уравнений. Мы рассматриваем все решения данной системы, а затем берем все уравнения, имеющие те же решения, что и исходная система. Сразу же пришло на ум, что эта ситуация лежит в рамках классического абстрактного соответствия Галуа. Кроме того, мы исходим из системы уравнений над алгеброй.

Нас интересует геометрический объект, а именно множество решений этого уравнения. Понятно, что это алгебраическое множество, лежащее в подходящем аффинном пространстве. С другой стороны, другим замкнутым объектом является множество всех следствий, выводимых из данной системы уравнений, то есть, формально говоря, логический объект, имеющий синтаксическую природу.

Теорема Гильберта говорит о том, что в том случае, когда мы рассматриваем уравнения в классе коммутативно ассоциативных алгебр с единицей над хорошим полем, замыкание имеет ясную алгебраическую характеризацию. Из разговоров с Рипсом я понял, что нечто схожее имеет место и для гораздо более сложного случая уравнений над свободной группой. Все это привело меня к мысли рассматривать проблему нуль-сталензац в самом общем смысле соответствия Галуа замкнутых синтаксических и семантических объектов.

Другим важным мотивирующим началом явился имеющийся у меня к тому времени опыт работы с алгебраической логикой. Эта наука состоит в существенной алгебраизации логических методов и теорем. Алгебраическая логика возникла под именем цилиндрических алгебр в работах Хенкина, Монка и Тарского. И примерно в это же время появилась конструкция Халмоша полиадических алгебр [7]. В своих работах [15], [17] я ввел многосортный вариант алгебраической логики. За такими алгебрами закрепилось название алгебр Халмоша. Я почувствовал, что алгебраическая логика является необходимым ингредиентом, позволяющим построить стройное теретико-модельное соответствие Галуа (см. параграф 2).

На этом языке Галуа-замкнутые объекты приобрели естественный вид алгебраических множеств и соответствующих им замкнутых систем уравнений. Я понял, что соответствие Галуа можно привязать к заданному многообразию, при этом тождества многообразий стали играть роль типа данных, а свободные алгебры многообразия стали рассматриваться как атомарные алгебры, содержащая атомарные формулы. Я почувствовал, что мы не должны ограничиваться уравнениями, а можем рассматривать произвольные системы формул.

За несколько месяцев сформировалась целая структура теоретико-модельных понятий геометрического и алгебраического характера. В результате в 1996 году в Израильском математическом журнале появилась статья "Varieties of algebras and algebraic varieties"[20] с основами универсальной алгебраической геометрии и готовой системой базисных понятий. На следующий год в статье "Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties"[21] вышедшей в Сибирском математическом журнале, эти понятия приобрели практически современную форму. Здесь следует сделать важное отступление. Классическая алгебраическая геометрия, в особенности над алгебраически замкнутым полем, имеет дело с описаниями структуры решения систем алгебраических уравнений. Другими словами, нас интересует описание того, как выглядят и какими свойствами обладают различные алгебраические многообразия. Возникла теория размерности, а с ней и проблема классификации таких многообразий. Довольно быстро стало понятно, что классификация алгебраических многообразий для произвольного многообразия алгебр является необыкновенно сложной, если не сказать невозможной, задачей. Лишь в редких случаях простых систем уравнений и хороших многообразий групп и Лиевых алгебр удавалось как-то описать решение. Надо было искать новые задачи и новые подходы, специфические для общего взгляда с позиций универсальной алгебраической геометрии. Таким краеугольным камнем будущей теории стало понятие геометрической эквивалентности алгебр.

Мне нужно было понятие, которое отражает идею одинаковости алгебр с точки зрения возможности решения уравнений. Например, ясно что если мы решаем уравнения над полем или его расширением, то возможности этих двух алгебр по отношению к решению уравнений разные. Значит надо сформулировать условие, которое говорит что для любого уравнения решения над одной алгеброй и над другой совпадают. Это условие естественным образом вписалось в построенное соответствие Галуа между парами элементов в свободной алгебре и точками в аффинном пространстве. Единственной загвоздкой было представление аффинного пространства в виде декартого произведения. Я заменил его на пространство гомоморфизмов $Hom(W(X), H)$ где $W(X)$ - свободная конечно порожденная алгебра, H - рассматриваемая алгебра, и все встало на свои места. С этого момента теория стала развиваться по законам диктуемым внутренней логикой понятий.

Две алгебры H_1 и H_2 называются геометрически эквивалентными, если для любой системы уравнений их радикалы вычисленные по отношению к первой и ко второй алгебре совпадают. Если рассматривать эти радикалы синтаксически, то это означает, что квазитождества алгебр H_1 и H_2 совпадают. В свою очередь, семантически такое определение влечет совпадение квазимногообразий порожденных H_1 и H_2. А этот факт вполне эффективный, подпадающий под теорему типа Биркгофа. Но сразу стала видна одна тонкость. В обычной алгебраической геометрии мы не встречаемся с бесконечными системами уравнений, поскольку как известно каждый идеал в полиномиальной алгебре конечно порожден. Такая же ситуация имеет место для уравнений над свободной группой, поскольку именно этот факт следует из теоремы Губы-Брайанта. А что можно сказать по поводу бесконечных систем уравнений в общем случае произвольного многообразия алгебр?

Так возникло понятие геометрически нетеровой алгебры. Алгебра называется геометрически нетеровой, если любая система уравнений над этой алгеброй эквивалентна ее конечной подсистеме. Здесь следует сделать одно отступление. Параллельно моим идеям, очень схожая теория стала развиваваться В.Ремесленниковым и его последователями А.Мясниковым, Э.Данияровой и другими, (смотри [4],[12], и соответствующе ссылки).Удивительным образом наши мысли перекликались, и некоторые понятия возникали практически одновременно. В дальнейшем это сотрудничество оказалось крайне плодотворным и важным. Разница была в природе возникновения понятий, но в результате все сходилось наилучшим образом.

Возвращаясь к геометрической эквивалентности алгебр, стало сразу ясно что имеется множество не геометрически нетеровых алгебр. Следовательно, две алгебры будут геометрически нетеровыми если совпадают их инфинитарные (бесконечные) квазитождества. Поскольку такие формулы не входят в элементарную теорию алгебры, то и геометрическая эквивалентность алгебр не следует из классической элементарной эквивалентности алгебр. Соответствующий пример для многообразия групп был блестяще построен Ремесленниковым-Мясниковым. Вопрос о геометрической нетеровости алгебр оказался достаточно трудным. Например, проблема геометрической нетеровости свободной Лиевой алгебры открыта до сих пор и путей решения ее совершенно не видно!

Несмотря на явно удачное определение геометрической эквивалентности, в нем для меня имелся важный изъян. Я имею ввиду то, что вся построенная теория в качестве краеугольной идеи имела понятие точки не как набора элементов фиксированной алгебры, а как специального гомоморфизма из свободной алгебры в конкретную алгебру многообразия, который "вычисляет"значение каждой конкретной координаты. А это значит, что вся теория должна строиться скорее на взаимодействии объектов, чем на рассмотрении каждого объекта в отдельности. Вот поэтому я решил, что необходимо привлечь категорные понятия и модифицировать соответственно определения таким образом, чтобы они учитывали динамику перехода от одной алгебры к другой.

Все категории возникли естественным образом. Во-первых, уравнения строились над некоторой свободной алгеброй $W(X)$ где X, разумеется, должно варьироваться. Так появилась категория Θ^0 конечно порожденных свободных алгебр. Ей соответствовала категория аффинных пространств $Hom(W(X), H)$, где H пробегает все фиксированное многообразие алгебр Θ. Две следующие необходимые категории - это двойственные категории замкнутых конгруэнций и алгебраических множеств. То есть именно те категории, которые возникают в классической алгебраической геометрии. Более того, немедленно определяются для произвольного многообразия алгебр рациональные отображения в качестве морфизмов и Галуа-соответствущие им категории координатных алгебр. Так возник набор категорий вокруг которого можно было строить дальнейшую теорию. Кроме категорий, я определил и несколько функторов, играющих важную роль во всей теории. Основным из них стал функтор замыкания $\mathcal{C}_H$, сопоставляющий каждой свободной алгебре $W(X)$ набор H-замкнутых конгруэнций. Здесь H произвольная алгебра из многообразия Θ.

Моим желанием было включить определение геометрической эквивалентности в какую-то схему, учитывающую категорный характер участвующих объектов. Было написано множество работ на эту тему, доказаны теоремы, но фактически поиски категорного определения геометрической эквивалентности продолжаются до сих пор.

Довольно быстро, где-то в начале 2000-х годов, стало понятно, что особую роль во всей картине играют обьекты, которые до сих пор не рассматривались в алгебре. Я имею ввиду группу автоморфизмов категории и понятие внутреннего автоморфизма категории. Автоморфизм φ категории $\mathcal{C}$ называется внутренним если он изоморфен тождественному изоморфизму категории $\mathcal{C}$. Если раскрыть это определение, учитывая понятие изоморфизма функторов, то становится очевидной схожесть определения внутреннего автоморфизма категории и внутреннего автоморфизма группы. Так или иначе, все внутренние автоморфизмы образуют подгруппу $Inn(\mathcal{C})$ группы всех автоморфизмов $Aut(\mathcal{C})$ категории $\mathcal{C}$.

Оказалось, что для всей теории крайне важна группа $Aut(\Theta^0)$, [28],[29],[30], [37]. Напомним, что Θ^0 - категория всех свободных конечно порожденных алгебр основного многообразия Θ.

Дадим такое обобщение геометрической эквивалентности алгебр. Назовем две алгебры H_1 и H_2 геометрически подобными если изоморфны категории алгебраических множеств $AG(H_1)$ и $AG(H_2)$ над этими алгебрами. Понятно что если две алгебры геометрически эквивалентны то они геометрически подобны. А когда верно обратное?

Ситуация здесь такая. Представим себе какую-либо алгебру обладающую какими-то геометрическими свойствами и попробуем как-то деформировать ее сохраняя геометрию. Деформировать в данном случае означает определить на ней производную структуру таким образом, что геометрия новой алгебры будет совпадать с геометрией старой. Оказывается, что такая нетривиальная деформация возможна если группа $Aut(\Theta^0)$ обладает внешними автоморфизмами! Если же все автоморфизмы $Aut(\Theta^0)$ внутренние, то понятия геометрической эквивалентности и геометрического подобия совпадают.

Одновременно были определены геометрическая автоморфная эквивалентность алгебр и многие другие важные понятия, которые уже диктовали пути развития универсальной алгебраической геометрии. Как выглядят возникающие понятия для того или иного конкретного многообразия алгебр представляется крайне интересным. Но без сомнения самым важным среди всего множества проблем универсальной геометрии было ощущение того, что помимо геометрической теории существует параллельная общая логическая геометрическая теория. Именно эта идея была реализована.

1.2. **Логическая геометрия.** В какой-то момент я осознал, что могу построить соответствие Галуа и для общего случая систем формул первого порядка. Это было настоящее событие, поскольку означало, что я могу изучать решения систем формул подобно тому как изучаются решения систем уравнений. Это также означало, что я могу распространить все идеи универсальной алгебраической геометрии на абсолютно новую ситуацию теории моделей.

Я решил, что прежде всего надо изложить подробно философию универсальной алгебраической геометрии, и на этой базе написать большую работу по основам логической геометрии. Так и было сделано.

Вначале появилась стостраничная статья в сборнике посвященном юбилею Е.С.Ляпина "Algebraic logic, varieties of algebras and algebraic varieties"[18], а затем уже последовательное изложение теории было сделано в МИАНОвском томе "Algebras with the same algebraic geometry"[22] и, наконец, вся теория была аккумулирована в препринте Еврейского Университета "Seven lectures on universal algebraic geometry"[19]. Это позволило сконцентрироваться на случае логической геометрии. Так появилась работа "Algebraic geometry in first-order logic"(2006) [23] и драфт книги "Algebraic logic and logical geometry"(2013) [16]. С этого момента универсальная алгебраическая геометрия и логическая геометрия стали представлять собой единый организм и все время шли вместе.

Как сделать из логики и теории моделей геометрическую теорию? Размышляя над этим вопросом, я пришел к выводу, что алгебра является необходимым связующим звеном. Мы хотим рассматривать системы формул как алгебраический объект, подобно тому как системы уравнений это просто конгруэнции над свободной алгеброй многообразия. Значит надо найти алгебраическое место, в котором системы формул первого порядка живут естественным образом. Выход подсказала алгебраическая логика.

К этому времени у меня уже был большой опыт работы с методами алгебраической логики. В середине 80-х годов меня заинтересовали работы Хенкина, Монка, Таского, Халмоша, Пигоцци, Немети и других по алгебраизации логики. В результате я пришел к понятию многосортной алгебраизации логики первого порядка, которая вошла в математику под именем алгебры Халмоша. Эта конструкция оказалась чрезвычайно успешной не только для логики, но и для решения некоторых старых алгебраических задач. В частности она была применена А.Гварамия для решения классической проблемы теории квазигрупп [6]. Я суммировал всю накопленную информацию об алгебрах Халмоша в большой монографии "Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных"[15].

Синтасическая алгебра Халмоша и оказалась тем объектом в котором формулы первого порядка живут наиболее естественным образом. К счастью, а скорее не к счастью, а в силу природы вещей булева алгебра всех подмножеств аффинного пространства также воспринимает действие кванторов и является семантической алгеброй Халмоша. Тогда процедура вычисления истинностного значения системы формул приобрела вид гомоморфизма одной алгебры Халмоша в другую. Все было готово для построения логического соответствия Галуа алгебраическими средствами.

В любом соответствии Галуа главную роль играют Галуа-замкнутые объекты. В геометрическом соответствии Галуа замкнутыми "внизу"объектами являются алгебраические множества, а "наверху замкнутые конгруэнции. Все это дает совпадении замкнутых Галуа-объектов с замкнутыми объектами в топологии Зариского. В логическом соответствии Галуа замкнутыми "внизу"объектами являются определимые множества, а замкнутыми "наверху"системами формул - замкнутые фильтры в синтаксической алгебре Халмоша. Все это дало универсальный способ переносить идеи алгебраической геометрии на логический случай, а значит на задачи теории моделей. Это было именно то, что нужно.

Почти немедленно возникло понятие логического ядра точки, о котором необходимо сказать несколько слов. Допустим мы имеем точку в аффинном пространстве. Напомню, что точка - это гомоморфизм из $W(X)$ в алгебру H. Как у любого гомоморфизма, у него есть ядро. Это ядро представляет собой множество уравнений которым заданная точка удовлетворяет. Поскольку у нас теперь имеется гомоморфизм алгебр Халмоша, то точно также можно определить логическое ядро $LKer(\mu)$ точки μ как множество элементов синтаксической алгебры Халмоша, то есть формул первого порядка, которые на данной точке принимают значение "истина". То есть это множество формул выполняемых в данной точке, то есть это ультрафильтр алгебры Халмоша, то есть это в точности то, что в теории моделей называется типом точки. Это дало мост связывающий логическую геометрию и классическую теорию моделей, и позволяющий взглянуть на теорию моделей с точки зрения геометрии и алгебры.

Мы просто следуем внутренней логике универсальной алгебраической геометрии заменяя понятия на их двойники в логической геометрии. На этом пути абсолютно естественно определяются понятия логически эквивалентных алгебр, логически нетеровых агебр, логически однородных алгебр, изотипных алгебр и многие другие. В следующем параграфе мы остановимся на пожалуй наиболее интересной проблеме логической геометрии - проблеме изотипности конечно порожденных групп и рассмотрим ее уже более детально, с точными определениями.

2. Как возникают здачи? Проблема изотипности алгебр

Каким-то образом случилось так, что проблема о которой пойдет речь в этом параграфе, не была известна в теории моделей до появления универсальной логической геометрии.

Цель этого раздела — ввести еще один логический инвариант, который описывает алгебры более жестко, чем элементарная эквивалентность. Элементарная эквивалентность алгебр H_1 и H_2 предполагает совпадение всех предложений выполнимых на H_1 и H_2. Подход, который мы собираемся рассматривать в этом параграфе, требует совпадения всех типов, реализуемых на H_1 и H_2. Мы называем такую ситуацию изотипностью алгебр. Прежде чем перейти к результатам нам необходимо ввести некоторые определения.

Пусть дана алгебра H. Ее элементарной теорией $Th(H)$ называется множество замкнутых формул - предложений, которые выполняются в любой точке каждого аффинного пространства над H. Элементарная теория - важный логический инвариант, характеризующий заданную алгебру. Классический вопрос, восходящий к философии Тарского и Мальцева состоит в том, чтобы описать все алгебры элементарно эквивалентные заданной. На этом пути получены известные характеризации: элементарно эквивалентных алгебраически замкнутых полей, абелевых групп [36], нильпотентных групп [11], булевых колец [5] и другие. В каждом случае такая полная хрктеризация элементарно эквивалентных алгебр является большой удачей.

С 1948 года до последнего времени простояла открытой знаменитая проблема Тарского: можно ли с помощью элементарной теории различить две неабелевы простые группы? Относительно недавно она была отрицательно решена Харлампович-Мясниковым [9] и Селой [32]. Подобный результат имеется и для широкого класса гиперболических групп.

В последние годы особую популярность приобрело понятие жесткости первого порядка [1]. Она характерузует случай, прямо противополжный случаю свободной группы.

Определение 2.1. *Две алгебры H_1 и H_2 называются элементарно эквивалентными если их элементарные теории совпадают.*

Зафиксируем некоторый класс алгебр $\mathcal{C}$. Нас интересуют все алгебры из $\mathcal{C}$ элементарно эквивалентные заданной. По теореме Левенгейма-Сколема для заданной алгебры H в каждой мощности имеется алгебра элементарно эквивалентная H. Поэтому если мы хотим думать об описании алгебр элементарно эквивалентных заданной, мы должны так выбрать класс $\mathcal{C}$ чтобы все алгебры из этого класса были одной мощности. Ну, например, класс конечных алгебр или класс конечно порожденных алгебр. Все это подсказало следующее определение жесткости.

Определение 2.2. *Конечно порожденная алгебра H называется жесткой первого порядка если любая другая конечно порожденная алгебра H_1 которая элементарно эквивалентна H, является ей изоморфной.*

Вопрос состоит в том, имеются ли какие-то хорошие примеры бесконечных групп обладающих этим свойством, то-есть групп в каком-то смысле противоположных свободной. Оказалось, что такие примеры встречаются прежде всего в классе линейных алгебраических групп.

Теорема 1 ([3], [31], [35], [1], [2],[8])**.** *Произвольная группа Шевалле $G(\Phi, O_s)$, $rk(\Phi) > 1$, над дедекиндовым кольцом арифметического типа является жесткой первого порядка. Любая неприводимая арифметическая решетка ранга выше 1 характеристики ноль является арифметически жесткой.*

Эта теорема свидетельствует о наличии у линейных групп богатой определимой структуры подгрупп, которая собственно и дает желаемый результат. А в свободной группе определимыми подгруппами являются только централизаторы точек, поэтому и ситуация противоположна жесткости.

Стоит обратить внимание на природу элементарной эквивалентности. Мы предполагаем что совпадают формулы, которые верны во ВСЕХ точках алгебры. Это значит, что алгебра (модель) выступает как единый набор точек, лишенных индивидуальности. В свою очередь, это значит что мы сравниваем алгебры в целом, не заботясь об индивидуальности составляющих ее элементов. Понятно, что такая характеризация редко может быть жесткой.

Определение 2.3. *Две алгебры H_1 и H_2 называются LG-изотипными, если для каждой точки $\mu : W(X) \to H_1$ существует точка $\nu : W(X) \to H_2$ такая, что $LKer(\mu) = LKer(\nu)$ и, наоборот, для каждой точки $\nu : W(X) \to H_2$ существует точка $\mu : W(X) \to H_1$ такая, что $LKer(\nu) = LKer(\mu)$.*

Мы можем переформулировать изотипность алгебр в более стандартных логических обозначениях.

Определение 2.4. *Пусть $\mathcal{L}$ — язык первого порядка, H и G — $\mathcal{L}$-алгебры. Тогда H и G изотипны, если для любого конечного набора $\bar{a}$ в H^n существует набор $\bar{b}$ в G^n такой, что $tp^H(\bar{a}) = tp^G(\bar{b})$ и наоборот.*

Здесь $tp^H(\bar{a})$ обозначает тип точки a.

Смысл определения 2.3 заключается в следующем. Две алгебры изотипны, если множества реализуемых типов над H_1 и H_2 совпадают. Можно сказать что эти алгебры имеют одинаковую логику типов. Некоторые ссылки на понятие изотипических алгебр содержатся в [25], [24], [26], [27], [28], [38].

Основное свойство состоит в следующем, см. [38].

Теорема 2. *Алгебры H_1 и H_2 логически эквивалентны тогда и только тогда, когда они изотипны.*

Это означает что мы пришли к понятию изотипности алгебр следуя логике понятий введенных в универсальной алгебраической геометрии. Это понятие значительно силнее элементарной эквивалентности алгебр так как учитывает совпадение индивидуальных логических свойств точек.

Следующая принципиальная гипотеза была сформулирована в [27], см. также [13]. Фактически, она утверждает что каждая конечно порожденная группа является жесткой по отношению к логике типов. Ее смысл состоит в том, что если вдобавок к совпадению элементарных теорий двух конечно порожденных групп мы потребуем совпадение типов произвольных точек над этими группами, то в силу этого должны быть исчерпаны все степени свободы приводящие к различию между группами. Проблема изотипной жесткости, (Б.Плоткин) состоит в следующем:

Гипотеза 1. *Любые две изотипные конечно порожденные группы изоморфны.*

В настоящее время, задача 2 решена утвердительно для многих групп. Некоторые случаи собраны в теореме 3 и в последующем следствии.

Теорема 3. *Известны следующие случаи изотипически жестких групп:*

- *Каждая конечно порожденная ко-хопфова группа изотипически жесткая в классе всех групп, см.* [38], [34].
- *Всякая конечно определенная хопфова группа изотипически жесткая в классе всех групп, см.* [34].
- *Пусть Θ - некоторое многообразие групп. Если конечно порожденная свободная группа в Θ хопфова, то она изотипически жесткая в классе всех групп, см.* [38].
- *Конечно порожденные метабелевы группы изотипически жесткие в классе всех групп* [13].
- *Конечно порожденные виртуально полициклические группы изотипически жесткие в классе всех групп* [13].
- *Конечно порожденные гиперболические группы без кручения изотипически жесткие в классе всех групп* [34].
- *Все группы поверхностей, не являющиеся неориентируемыми поверхностями группы рода 1, 2 или 3 изотипически жесткие в классе всех групп* [13].

Следствие 2.5. *Конечно порожденные абсолютно свободные, свободные абелевы, свободные нильпотентные, свободные разрешимые группы изотипически жесткие.*

Теорема 4. *Любая конечно порожденная линейная группа изотипически жесткая. В частности, всякая аффинная группа Каца — Муди над конечным полем изотипически жесткая.*

Проблема 1. *Каковы классы изотипности полей? Когда два изотипических поля изоморфны?*

Отталкиваясь от понятий универсальной алгебраической геометрии назовем две алгебры логически подобными если категории определимых множеств над этими множествами изоморфны. Нас интересует вопрос когда логическое подобие алгебр сводится к логической эквивалентности, а следовательно к изотипности алгебр. Как известно, для случая геометрического подобия достаточно исследовать внутренние автоморфизмы категории конечно порожденных свободных алгебр Θ^0. Каждую многосортную алгебру Халмоша можно рассматривать как категорию алгебр Халмоша Hal^0_Θ []. Эта категория играет для логической геометрии роль аналогичную той, которую категория Θ^0 играет для универсальной алгебраической геометрии.

Гипотеза 2. *Пусть Θ^0 категория всех групп. Тогда любой автоморфизм категории Халмоша Hal^0_Θ внутренний.*

В заключение следует сказать, что еще одной важной задачей является исследование объектов универсальной логической геометрии для разных интересных конкретных многообразий алгебр и определение точного вида синтасически – семантических переходов для этих категорий. Помимо стандартных многообразий групп, ассоциативных и лиевых алгебр, имеется множество других многообразий, для которых ситуация совершенно неясна. Укажем, напрмер, многообразие почти-колец, связанное с тропической геометрией, или многообразие квазигрупп.

Остановимся чуть подробнее на универсальной геометрии над квазигруппами. Этот вопрос особенно интересен тем, что квазигруппы имеют свои собственные хорошо известные геометрические приложения. Но как квазигруппы выглядят с точки зрения универсальной алгебраической геометрии и логической геометрии. Этот вопрос абсолютно открыт. Предлагаемая структура исследования квазигрупп с этих позиций состоит в следующем.

- Изотипные и изоморфные квазигруппы. Основы алгебраической и логической геометрии квазигрупп.
- Геометрическая эквивалентность квазигрупп.
- Автоморфизмы категории свободных квазигрупп.
- Доказать, что все автоморфизмы категории свободных квазигрупп внутренние.
- Теорема. Категории алгебраических множеств над двумя квазигруппами изоморфны тогда и только тогда когда они геометрически эквивалентны.
- Геометрическая нетеровось для квазигрупп.
- Когда две квазигруппы порождают одно и то же квазимногообразие?
- Изотипность и логическое подобие для квазигрупп.
- Верно ли что две конечно порожденные квазигруппы изотипны тогда и только тогда, когда они изотопны?
- Верно ли что две квазигруппы логически подобны тогда и только тогда, когда они изотипны?
- Элементарная эквивалентность и логическая жесткость для квазигрупп.

Список литературы

[1] N. Avni, A. Lubotzky, C. Meiri, *First order rigidity of non-uniform higher-rank arithmetic groups*, Invent. Math. (2019), 219–240.

[2] N. Avni, C. Meiri, *On the model theory of higher rank arithmetic groups*, arXiv 2008.01793v1 (2020), 59pp.

[3] E. I. Bunina, *Isomorphisms and elementary equivalence of Chevalley groups over commutative rings*, Sb. Math. bf 210 (2019), 1067–1091.

[4] E. Daniyarova, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over algebraic systems*, Novosibirsk, SO RAN, (2016), 243pp.

[5] S.Goncharov, Countable Boolean allgebras and decidability. Novosibirsk: Science books, 1996 (in Russian).

[6] A. Gvaramia,*Halmos algebras and axiomatizable classes of quasigroups*, Uspekhi Mat. Nauk, 40, No. 4 (244), (1985), 215-–216.

[7] P.R. Halmos, *Algebraic logic*, Chelsea, New York (1969).
[8] B. Kunyavskii, E. Plotkin and N. Vavilov, *Bounded generation and commutator width of Chevalley groups: function case*,arXiv:2204.10951 [math.GR], 54pp.
[9] O. Kharlampovich, A. Myasnikov, *Elementary theory of free nonabelian groups*, Journal of Algebra, **302:2**, (2006) 451–552.
[10] A. Morgan, A. Rapinchuk, B. Sury, *Bounded generation of SL_2 over rings of S-integers with infinitely many units*, Algebra and Number Theory, **12:8**, (2018) 1949–1974.
[11] A.G. Myasnikov, *The structure of models and a criterion for the decidability of complete theories of finite-dimensional algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Met. 53 (2) (1989) 379–397. (in Russian) English translation in Math. USSR-Izv. 34(2) (1990) 389–407.
[12] A. Myasnikov, V. Remeslennikov, *Algebraic geometry over groups II, Logical foundations*, J. Algebra, **234**, (2000) 225–276.
[13] A.G. Myasnikov and N.S. Romanovskii, *Characterization of finitely generated groups by types*, International Journal of Algebra and Computation, **28:8**, (2018) 1613-1632.
[14] A. Nies, *Describing Groups*, Bull. Symb. Logic, **13:3**, (2007) 305–339.
[15] B. Plotkin, *Universal Algebra, Algebraic Logic and Databases*, Kruwer Acad. Publ., Dordrecht (1994).
[16] B. Plotkin, *Algebraic logic and logical geometry* (2013), 287pp
[17] B. Plotkin, *Algebra, categories and databases*, Handbook of Algebra, **2**, Elsevier (2000) 81–148.
[18] *Algebraic logic, varieties of algebras and algebraic varieties*, ArXiv:math/0312420v1, (2003), 62pp.
[19] B. Plotkin, *Seven lectures on the universal algebraic geometry*, “Groups, Algebras, and Identities”, AMS, Contemporary Mathematics, **726**, (2019) Israel Mathematical Conferences Proceedings, 143–217.
[20] B. Plotkin, Varieties of algebras and algebraic varieties, *Israel J. Math.*, **96:2** (1996) 511–522.
[21] B. Plotkin, Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties, *Siberian Advanced Mathematics, Allerton Press*, **7:2** (1997) 64–97.
[22] B. Plotkin, *Algebras with the same algebraic geometry*, Proceedings of the International Conference on Mathematical Logic, Algebra and Set Theory, dedicated to 100 anniversary of P.S. Novikov, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, MIAN, **242** (2003) 176–207. Arxiv: math.GM/0210194.
[23] B. Plotkin, *Algebraic geometry in First Order Logic*, Sovremennaja Matematika and Applications, **22**, (2004) 16–62. *Journal of Math. Sciences*, **137:5**, (2006) 5049–5097.
[24] B. Plotkin, *Algebraic logic and logical geometry in arbitrary varieties of algebras*, Proceedings of the Conf. on Group Theory, Combinatorics and Computing, AMS Contemporary Math. series, (2014) 151–169.
[25] B. Plotkin, *Isotyped algebras*, Sovremennye problemy matematiki (Russian), **15**, (2011) 40–66. Translation: Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, **278:1**, (2012) S91–S115.
[26] B. Plotkin, E. Aladova, E. Plotkin, *Algebraic logic and logically-geometric types in varieties of algebras*, Journal of Algebra and its Applications, **12:2** (2012) Paper No. 1250146.
[27] B. Plotkin, E. Plotkin, *Multi-sorted logic and logical geometry: some problems*, Demonstratio Math., **48:4**, (2015) 577–618.
[28] B. Plotkin and G. Zhitomirski, *Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras*, Algebra and Analysis, **19:5**, (2007) 214–245, St. Petersburg Math. J., **19:5**, (2008) 859–879.
[29] B. Plotkin and G. Zhitomirski, On automorphisms of categories of universal algebras, J. Algebra Comput., **17:5-6** (2007) 1115–1132.
[30] B. Plotkin , G. Zhitomirski, Automorphisms of categories of free algebras of some varieties, *J. Algebra*, **306:2** (2006) 344–367.
[31] D. Segal, K. Tent, *Defining R and $G(R)$*, arXiv:2004.13407, (2020) 30 pp.
[32] Z. Sela *Diophantine geometry over groups VI: The elementary theory of a free group*, GAFA, **16**, (2006), 707-730.
[33] Z. Sela, *The elementary theory of a hyperbolic group*, Proceedings of the LMS, **99**, (2009) 217–273.
[34] R. Sklinos, Private correspondence.
[35] M. Sohrabi, A. Myasnikov, *Bi-interpretability with Z and models of the complete elementary theories of $SL_n(\mathcal{O})$, $T_n(\mathcal{O})$ and $GL_n(\mathcal{O})$, $n \geqslant 3$*, arXiv:2004.03585, (2020) 19pp.
[36] W. Szmielew, Elementary properties of abelian groups, Fund. Math. 41 (1955), 203-271
[37] A. Tsurkov, Automorphic equivalence of algebras, *Int. J. Algebra Comput.*, **17:5-6** (2007) 1263–1271.
[38] G. Zhitomirski, *On types of points and algebras*, International Journal of Algebra and Computation, **28:8**, (2018) 1717–1730.

A.Gvaramia, *Abkhazian State University, Sukhumi, Abkhazia*
B.Plotkin, *Department of Mathematics, Hebrew University, Jerusalem, Israel*
E.Plotkin, *Department of Mathematics, Bar Ilan University, Ramat Gan, Israel*