משתנים מקריים דו-ממדים

הגדרה 1. פונקציית ההתפלגות **המשותפת** של זוג המשתנים המקריים ξ ו η מוגדרת לכל ממשיים x ו y על ידי

$$F(x,y)=F_{\xi,\eta}(x,y)=P\{\xi\le x,\eta\le y\}=P\{\varpi\in\Omega\,|\,\xi\le x,\eta\le y\}$$

טענה 1. לכל x ו y אם $x_1<x_2$ אז $F(x_1,y)\le F(x_1,y)$, אם $y_1<y_2$ אז $F(x,y_1)\le F(x,y_2)$,

$$\lim_{x,y\to\infty}F_{\xi,\eta}(x,y)=1\qquad \lim_{y\to-\infty}F_{\xi,\eta}(x,y)=0\qquad \lim_{x\to-\infty}F_{\xi,\eta}(x,y)=0$$

$$P\{a_1<\xi\le a_2,b_1<\eta\le b_2\}=F(a_2,b_2)+F(a_1,b_1)-F(a_1,b_2)-F(a_2,b_1).$$

הגדרה 2. כדי לקבל את פונקציית ההתפלגות **השולית** של ξ ושל η**,** משתמשים ב-

$$F_\xi(x)=\lim_{y\to\infty}F_{\xi,\eta}(x,y)\qquad F_\eta(y)=\lim_{x\to\infty}F_{\xi,\eta}(x,y)$$

הגדרה 3. אם ξ **ו** η שנהם משתנים מקריים בדידים, אז פונקציית ההתפלגות **המשותפת** שלהם מוגדרת על ידי-

$$p(i,j)=P\{\xi=x_i,\eta=y_j\}=P\{\omega\in\Omega\,|\,\xi(\omega)=x_i,\eta(\omega)=y_j\}$$

פונקציית ההתפלגות **השולית** של ξ ושל η**,** מתקבלת על ידי-

$$p_i=P\{\xi=x_i\}=P\{\omega\in\Omega\,|\,\xi(\omega)=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}p(i,j)$$

$$p'_j=P\{\eta=y_j\}=P\{\omega\in\Omega\,|\,\eta(\omega)=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty}p(i,j)$$

הגדרה 4. אומרים על המשתנים המקריים הבדידים $\xi_1,...,\xi_r$ שיש להם התפלגות משותפת **מולתינומית**, אם פונקציית ההסתברות המשותפת שלהם נתנה על-ידי-

$$P\{\xi_1=n_1,\xi_2=n_2,...,\xi_r=n_r\}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdot...\cdot n_r!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdot...\cdot p_r^{n_r}$$ **,** כאשר $0\le n_1,...,n_r\le n$, $n_1+...+n_r=n$

ו $p_1,...,p_r$ הן הסתברויות המקיימות $p_1+...+p_r=1$.

הגדרה 5. משתנה דו ממדי הוא רציף" אם :

א) פונקציית ההתפלגות שלו רציפה בכל מקום

ב) הנגזרת המערבת $f_{\xi,\eta}(x,y)=\dfrac{\partial^2F_{\xi,\eta}(x,y)}{\partial y\partial x}$ קיימת ורצפה בכל מקום, פרט אולי למספר סופי של קווים רציפים.

טענה 2.

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f_{\xi,\eta}(u,v)dudv,\qquad P\{(\xi,\eta)\in A\}=\int_{(u,v)\in A}f_{\xi,\eta}(u,v)dudv$$

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi,\eta}(x,v)dv,\qquad f_\eta(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi,\eta}(u,y)du$$

הגדרה 6. אומרים על המשתנים המקריים ξ, η שהם בלתי תלויים, אם לכל שתי קבוצות של מספרים ממשיים A,B מתקיים – המאורות, $\{\omega\in\Omega \mid \xi(\omega)\in A\}$
$\{\omega\in\Omega \mid \eta(\omega)\in B\}$ הם בלתי תלויים. באופן כללי, המשתנים המקריים $\xi_1,...,\xi_n$ הם בלתי תלויים, אם לכל n קבוצות של מספרים ממשיים $A_1,...,A_n$ מתקיים

$$P\{\xi_1\in A_1,...,\xi_n\in A_n\}=P\{\xi_1\in A_1\}\cdot ...\cdot P\{\xi_n\in A_n\}$$

טענה 3. , המשתנים המקריים $\xi_1,...,\xi_n$ הם בלתי תלויים, אם ורק אם את פונקציית ההתפלגות המשותפת שלהם (או את פונקציית ההסתברות המשותפת במקרה הבדיד,
או את פונקציית הצפיפות המשותפת במקרה הרציף) ניתן לפרק למכפלה של n גורמים, האחד תלוי ב- x_1 בלבד, השני ב- x_2 בלבד, ... ה n ב- x_n בלוד.

הגדרה 7. השונות **המשותפת** של ξ **ו** η מסומנת ב- $Cov(\xi,\eta)$, ומוגדרת על ידי-

$$Cov(\xi,\eta)=E[(\xi-E[\xi])(\eta-E[\eta])]$$

טענה 4.
$$Cov(\xi,\eta)=Cov(\eta,\xi),\quad Cov(\xi,\xi)=Var(\xi),\quad Cov(a\xi,\eta)=aCov(\xi,\eta),\quad Cov(\xi,\eta)=E[\xi\eta]-E[\xi]E[\eta]$$

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\sum_{j=1}^{m}\eta_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov(\xi_i,\eta_j)$$

טענה 5.
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)=\sum_{i=1}^{n}Var(\xi_i)+2\sum_{0\le i<y\le n}Cov(\xi_i,\xi_j)$$

הגדרה 8. מקדם-**המתאם** בין שני משתנים מקריים ξ **ו** η מסומנת ב- $\rho(\xi,\eta)$, ומוגדרת על ידי-

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{Var(\xi)Var(\eta)}}$$

טענה 6. $-1\le\rho(\xi,\eta)\le 1$

טענה 7. $\rho(\xi,\eta)=\pm 1$ אם ורק אם $\xi=a+b\eta$ $(a,b\in R)$

הגדרה 9. אם $\rho(\xi,\eta)=0$, אומרים ש ξ **ו** η **בלתי-מתואמים**.

טענה 8. אם ξ **ו** η שני משתנים מקריים בלתי-תלויים, אז הם בלתי-מתואמים.

דוגמה של שני משתנים מקריים ξ **ו** η שהם בלתי-מתואמים ולא בלתי-תלויים:

$\xi(\omega),\eta(\omega)\in\{-1,0,1\}$ $\quad p(0,1)=p(0,-1)=p(1,0)=p(-1,0)=1/4$, אז

$p_\xi(0)=p_\eta(0)=1/2$, $\quad p_\xi(-1)=p_\xi(1)=p_\eta(-1)=p_\eta(1)=1/4$, $\quad E[\xi]=E[\eta]=E[\xi\eta]=0$,

$\rho(\xi,\eta)=0$, $\quad 1/8=p_\xi(0)p_\eta(1)\ne p(0,1)=1/4$.

טענה 9. אם ξ **ו** η שני משתנים מקריים רציפים בלתי-תלויים, אז

$$f_{\xi+\eta}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_\xi(v)f_\eta(x-v)dv$$

טענה 10. אם המשתנים המקריים $\xi_1,...,\xi_n$ בלתי תלויים, , אז משתנים מקריים $\phi_1(\xi_1),...,\phi_n(\xi_n)$ הם גם בלתי-תלויים.