משתנים מקריים

הגדרה 1. פונקציית מספרית המוגדרת על מרחב המדגם Ω נקראת בשם **משתנה מקרי** (בקיצור מ"מ).

הגדרה 2. **פונקציית ההתפלגות** F_ξ של משתנה מקרי ξ מוגדרת לכל מספר ממשי x על ידי

$$F_\xi(x)=F(x)=P\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)\le x\}=P\{\xi\le x\}$$

טענה 1. **א)** F_ξ היא פונקציה לא-ירדת; כלומר, אם $x<y$ אז $F_\xi(x)\le F_\xi(y)$

ב) $\lim_{x\to\infty}F_\xi(x)=1$

ג) $\lim_{x\to-\infty}F_\xi(x)=0$

ד) רציפה מימין ; כלומר, לכל x ולכול סידרה ירדת x_n , כאשר $n\ge1$, המתכנסת ל- x,

מתקיים $\lim_{n\to\infty}F_\xi(x_n)=F_\xi(x)$

הגדרה 3. משתנה מקרי, היכול לכבל לכל היתר מספר בן-מנייה של ערכים אפשריים, נקרא **משתנה מקרי בדיד**. מגדירים את **פונקציית ההסתברות** $p_\xi(x)$ של משתנה מקרי בדיד ξ על-ידי-

$$p_\xi(x)=p(x)=P\{\omega\in\Omega:\xi(\omega)=x\}=P\{\xi=x\}$$

פונקציית ההסתברות $p(x)$ חיובית לכל היתר למספר בן-מנייה של ערכי x. כלומר, אם המשתנה מקרי ξ חייב לקבל אחד מן הערכים $x_1,x_2,\ldots$ אז -

$$p(x_n)\ge0\,,\qquad n=1,2,\ldots$$

כל ערך אחר של x : $p(x)=0$, ו

$$\sum_{n=1}^{\infty}p(x_n)=1\,.$$

הגדרה 4. יהי ξ משתנה מקרי בדיד. התוחלת של ξ תסומן ב- $E[\xi]$ והיא ניתנת על ידי:

$$E[\xi]=\sum_{n=1}^{\infty}x_nP(\xi=x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_np(x_n)$$

כאשר יש התכנסות מוחלטת, כלומר

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\,p(x_n)<\infty\,.$$

טענה 2. יהי ξ משתנה מקרי בדיד. אז לכל פונקציה ממשית מתקיים:

$$E[f(\xi)]=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)p(x_n)$$

כאשר

$$\sum_{n=1}^{\infty}|f(x_n)|\,p(x_n)<\infty\,.$$

טענה 3.

א) אם $\xi\ge0$ אז $E[\xi]\ge0$

ב) $E[a\xi+b\eta]=aE[\xi]+bE[\eta]$

ג) אם $\xi\ge\eta$ אז $E[\xi]\ge E[\eta]$

ד) $E[|\xi|]\ge|E[\xi]|$

ה) $E[\xi^2]E[\eta^2]\ge(E[|\xi\eta|])^2$ (אי-שיוון קושי-שוורץ)

ו) אם ξ, η בלתי תלויים, אז $E[\xi\eta]=E[\xi]E[\eta]$

ז) אם $\xi=I_A$ אז $E[\xi]=P(A)$

כאשר אינדיקאטור פונקציה I_A מוגדרת על ידי:

$$I_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}\,,\qquad \omega\in\Omega\,.$$

אומרים על המשתנים המקריים ξ, η שהם בלתי תלויים, אם לכל שתי קבוצות של מספרים ממשיים A,B מתקיים – המאורות, $\{\omega\in\Omega\,|\,\xi(\omega)\in A\}$ ו $\{\omega\in\Omega\,|\,\eta(\omega)\in B\}$ הם בלתי תלויים.

הגדרה 5. השונות של משתנה מקרי ξ מסומנת $Var(\xi)$ והיא מוגדרת על ידי :

$Var(\xi) = E[(\xi-\mu)^2]$ כאשר $\mu = E[\xi]$.

השונות היא מידה לרמת הפיזור של הערכים האפשריים של ξ .

טענה 4.

$$Var(\xi) = E[\xi^2] - (E[\xi])^2,$$
$$Var(a\xi + b) = a^2 Var(\xi)$$

הגדרה 6. אומרים על משתנה מקרי ξ שהוא משתנה מקרי **אחיד** עם פרמטר N , אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$$p(k) = P\{\xi = k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, ..., N, \quad E[\xi] = \frac{N+1}{2}, \quad Var(\xi) = \frac{N^2-1}{12}.$$

מודל: בחירת מקרית של מספר שלם בין 1 ל-N.

הגדרה 7. אומרים על משתנה מקרי ξ שהוא משתנה מקרי **ברנולי**, אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$p(0) = P\{\xi = 0\} = 1-p$, $p(1) = P\{\xi = 1\} = p,$ כאשר $0 < p < 1$.

הגדרה 8. אומרים על משתנה מקרי ξ שהוא משתנה מקרי **בינומי** עם הפרמטרים (n, p) (נסמן: $\xi \sim B(n, p)$) , אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n, \quad E[\xi] = np, \quad Var[\xi] = np(1-p)$$

הגדרה 9. אומרים על משתנה מקרי ξ שהוא משתנה מקרי **פואסוני** עם פרמטר λ (נסמן: $\xi \sim Poi(\lambda)$) , אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$$p(k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad Var(\xi) = E(\xi) = \lambda$$

טענה 5. משפט פואסון: יהי $\xi \sim B(n, p(n))$, כאשר $\lim_{n\to\infty} np(n) = \lambda > 0$, אזי

$$p(k) = P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

הגדרה 10. התפלגות גיאומטרית. מבצעים סדרת ניסויי ברנולי בעלי הסתברות p ל"הצלחה". יהי ξ - מספר הניסויים עד לקבלת הצלחה הראשונה (כולל).

נאמר ש- ξ הוא **משתנה גיאומטרי** עם פרמטר p . נרשום $\xi \sim G(p)$.

טענה 6. פונקציית ההסתברות של משתנה גיאומטרית היא

$$p(k) = P(\xi = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, ..., \quad E[\xi] = 1/p, \quad Var(\xi) = \frac{1-p}{p^2}$$

הגדרה 11. התפלגות בינומי שלילי. מבצעים סדרת ניסויי ברנולי בעלי הסתברות p ל"הצלחה". יהי ξ - מספר הניסויים עד לקבלת בדיוק r הצלחות.

טענה 7. פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי בינומי שלילי היא

$$p(k) = P(\xi = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r \cdot (1-p)^{k-r}, \quad k = r, r+1, ..., \quad E[\xi] = \frac{r}{p}, \quad Var(\xi) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

הגדרה 12. אומרים על משתנה מקרי ξ שהוא משתנה מקרי **היפרגיאומטרי** עם הפרמטרים n, m ו N , אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$$p(k) = P\{\xi = k\} = \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad E[\xi] = np \quad (p = m/N), \quad Var[\xi] = \frac{N-n}{N-1} np(1-p),$$

ו $n - (N-m) \le k \le \min(n, m)$.