3. אקסיומות ההסתברות

אנו מניחים שלכל מאורע A במרחב המדגם Ω מוגדר מספר $P(A)$,המקיים את שלוש האקסיומות שלהלן :

אקסיומה 1: $0 \le P(A) \le 1$

אקסיומה 2: $P(\Omega) = 1$

אקסיומה 3: לכל סדרה של מאורעות זרים $A_1, A_2, ...,$ כלומר, מאורעות המקיימים $A_i \cap A_j = \varnothing$ לכל $i \ne j$ מתקיים

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

טענה 9 : (חוק המשלים): $P(A^c) = 1 - P(A)$ **,** $(A^c \cup A = \Omega, A^c \cap A = \varnothing)$.

טענה 10: $P(\varnothing) = 0$ **.**

טענה 11: (חוק החיבור): **אם** $A \cap B = \varnothing$ **, אז** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **; אם** $A \subseteq B$ **, אז** $P(A) \le P(B)$ **.**

אם $A_i \cap A_j = \varnothing$ **לכל** $i \ne j$ $1 \le \text{i,j} \le n$ **, אז** $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

טענה 12 : (חוק האיחוד): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

הגדרה : אומרים על סדרת מאורעות $\{A_n, n \ge 1\}$ שהיא סדרה עולה, אם -

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq ...$$

ן שהיא סדרה ירדת, אם $A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... A_n \supseteq A_{n+1} \supseteq ...$

טענה 13: אם $\{A_n, n \ge 1\}$ היא סדרה עולה של מאורעות, אז -

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

אם $\{A_n, n \ge 1\}$ היא סדרה יורדת של מאורעות, אז -

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

טענה 14: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

4. הסתברות מותנית, אי-תלות

הגדרה 1: יהיו A ו-B שני מאורעות כך ש- $P(B) > 0$. הסתברות **המותנית** של A כאשר ידוע שהמאורע B התרחש (בקיצור, ההסתברות של A בתנאי B) תסומן $P(A/B)$ והיא ניתנת על ידי:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

טענה 1: חוק הכפל: $P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdots P(A_n / A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_{n-1}) .$$

דוגמה 1 : מוציאים מחפיסה 2 קלפים זה אחר זה. מהי ההסתברות ששניהם אדומים? (p=25/102).

טענה 2: נוסחת ההסתברות השלמה : יהיו $A_1, ..., A_n$ מאורעות זרים (באלי הסתברות חיוביות) שאיחודם הוא כל המרחב Ω. אזי לכל מאורע B מתקיים:

$$P(B) = P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + ... + P(B/A_n)P(A_n)$$

דוגמה 2 : מאוכלוסיה בגודל n, שבה m פרטים הם "מיוחדים" ו- n-m פרטים "רגילים", נבחרו באופן מקרי פרטים בזה אחר זה. נתבונן במאורעות: A_i הפרת ה- i שנבחר הוא "מיוחד". בין שהבחירה נעשית **עם** החזרה או **ללא** החזרה של פרת שהוצא, מתקיים: $P(A_i)=m/n$ $(i=1,...,k)$.

טענה 3: **נוסחת בייס (Bayes)** : יהיו $A_1,...,A_n$ מאורעות זרים (באלי הסתברות חיוביות) שאיחודם הוא כל המרחב Ω. אזי לכל מאורע B $(P(B)>0)$ מתקיים:

$$P(A_k/B)=\frac{P(B/A_k)P(A_k)}{P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+...+P(B/A_n)P(A_n)}$$

דוגמה 3 : נתונים 3 ארונות A_i $(i=1,2,3)$. לכל ארון שתי מגרות, ב- A_1 מטבע זהב בכל מגרה, ב - A_2 מטבע זהב במהרה אחת ומטבע כסף בשנייה, ו ב- A_3 מטבע כסף בכל מגרה. ארון נבחר באופן מקרי ומגרה אחת נפתחת. המטבע במגרה הוא זהב. נחשב על סמך מידע זה את ההסתברות שבמגירה השנייה גם מטבע זהב. נסמן, B="ראינו מטבע זהב" ו- A_i="ארון מספר i נבחר" $(i=1,2,3)$. . אנו מעוניינים ב- $P(A_1/B)$ (=2/3).

דוגמה 4 : סטודנט ניגש למבחן אמריקני. בכל שאלה, אם הוא ידע מהי התשובה הנכונה הוא מסמן אותה, ואם אינה ידע – הוא מנחש תשובה ומסמנה. נניח שההסתברות שהסטודנט ידע מהי התשובה הנכונה שווה בחול השאלות. אם נסמן הסתברות זה ב p, אז ההסתברות שהוא מנחש את התשובה הנכונה היא 1-p. נניח עוד, שמספר התשובות המוצעות לשאלה הוא m, ושהסתברות לנחש את התשובה הנכונה היא $1/m$. מהי ההסתברות המותנית שהנבחן ידע מהי התשובה הנכונה לשאלה, אם נתון שהוא סימן אותה?

(פתרון: A – "סטודנט יודע מהי התשובה הנכונה", B – "הנבחן מסמן את התשובה הנכונה", $P(A/B)=\dfrac{mp}{1+(m-1)p}$, אם $p=1/2, m=5$ אז $P(A/B)=5/6$)

דוגמה 5 : (התרוששות המהמר) משחק מסוים בבית הימורים הוא שמטילים מטבע סימטרי (כלומר : $P(\{0\})=P(\{1\})=1/2$ בכל הטלה) ומהמר מרוויח או מפסיד דולר אחד בכל הטלה בהתאם לכך שניחש נכון או לא נכון את תוצאת ההטלה. מהמר שמתחיל לשחק עם קרן של k דולרים מחליט לשחק עד שקרן תגיה ל- n דולרים או עד שיפסיד את כל כספו (התרוששות). נגדיר את המאורעות הבאים: A_k^n - "התרוששות לפני שקרן מגיעה ל- n דולרים", B_k^n - "קרן מגיעה ל- n דולרים לפני התרוששות".

מהי ההסתברות של A_k^n, ו של B_k^n ? (נסמן $p(k)=p(k,n)=P\left(A_k^n\right)$, ו $q(k)=q(k,n)=P\left(B_k^n\right)$, אזי $p(0)=1$, $p(n)=0$, $q(0)=0$, $q(n)=1$, B- "זכייה בהטלה הראשונה", B^c - "הפסד בהטלה הראשונה", ... $p(k,n)=1-k/n$, $q(k,n)=k/n$.)

הגדרה 3: שני מאורעות A ו-B הם **בלתי תלויים** (ב"ת) אם מתקיים:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

אחרת ייקראו המאורעות תלויים.

אם $P(A)>0$,תנאי זה שקול לתנאי $P(B/A)=P(B)$, ואם $P(B)>0$ הוא שקול לתנאי $P(A/B)=P(A)$.

כלומר, A ו-B הם בלתי-תלויים אם מידע על התרחשות אחד מהם אינו משנה את ההסתברות להתרחשות האחר.

הגדרה 5: נאמר על המאורעות $A_1,...,A_n$ שהם **בלתי תלויים,** אם לכל תת-קבוצה $A_{i_1},...,A_{i_r}$ שלהם $(r\le n)$ מתקיים –

$$P(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_r})=P(A_{i_1})...P(A_{i_r})$$

דוגמה 6 : בזריקת שתי קוביות נסמן: A ="הראשונה יצאה איזוגי", B ="השנייה יצאה איזוגי", C="סכום השתיים יצאה איזוגי" אזי $P(A)=P(B)=P(C)=1/2$ וגם $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=1/4$ ולחן המאורות ב"ת בזוגות.

אך $A\cap B\cap C=\varnothing$, ולחן $0=P(A\cap B\cap C)\ne P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$, כך ש- $\{A,B,C\}$ אינה משפחה ב"ת.

למרות שהמאורעות ב"ת בזוגות.