רשימת נוסחאות

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}, \qquad P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \qquad \binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

נוסחת ההסתברות השלמה

$$P(B)=P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+\ldots+P(B/A_n)P(A_n)$$

נוסחת בייס

$$P(A_k/B)=\frac{P(B/A_k)P(A_k)}{P(B/A_1)P(A_1)+P(B/A_2)P(A_2)+\ldots+P(B/A_n)P(A_n)}$$

$$E[\xi]=\sum_{n=1}^{\infty}x_nP(\xi=x_n)=\sum_{n=1}^{\infty}x_np(x_n) \qquad E[f(\xi)]=\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)p(x_n)$$

$Var(\xi)=E[(\xi-\mu)^2]$ כאשר $\mu=E[\xi]$ $\quad Var(\xi)=E[\xi^2]-(E[\xi])^2$.

ξ משתנה מקרי בינומי עם הפרמטרים (n,p) ($\xi\sim B(n,p)$)

$$p(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,\ldots,n, \quad E[\xi]=np, \quad Var[\xi]=np(1-p)$$

ξ משתנה מקרי פואסוני עם פרמטר λ (נסמן: $\xi\sim Poi(\lambda)$), אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$$p(k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots \quad Var(\xi)=E(\xi)=\lambda$$

משפט פואסון: יהי $\xi\sim B(n,p(n))$, כאשר $\lim_{n\to\infty}np(n)=\lambda>0$, אזי

$$p(k)=P(\xi=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\ldots$$

ξ משתנה **גיאומטרי** עם פרמטר p. נרשום $\xi\sim G(p)$.

$$p(k)=P(\xi=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}, \quad k=0,1,2,\ldots \quad E[\xi]=1/p, \quad Var(\xi)=\frac{1-p}{p^2}$$

פונקציית ההסתברות של משתנה מקרי בינומי שלילי היא

$$p(k)=P(\xi=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r\cdot(1-p)^{k-r}, \quad k=r,r+1,\ldots \quad E[\xi]=\frac{r}{p}, \quad Var(\xi)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

ξ - משתנה מקרי **היפרגיאומטרי** עם הפרמטרים n,m ו N, אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$$p(k)=P\{\xi=k\}=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad E[\xi]=np \quad (p=m/N), \quad Var[\xi]=\frac{N-n}{N-1}np(1-p), \text{ ו}$$

$n-(N-m)\le k\le\min(n,m)$.

ξ משתנה מקרי **אחיד** עם פרמטר N, אם פונקציית ההסתברות שלו נתונה על-ידי-

$$p(k)=P\{\xi=k\}=\frac{1}{N}\ ,\quad k=1,\dots,N\ ,\quad E[\xi]=\frac{N+1}{2}\ ,\quad Var(\xi)=\frac{N^2-1}{12}.$$

ξ הוא משתנה מקרי **אחיד** ב קטע $[a,b]$ אם פונקציית הצפיפות שלו נתונה על-ידי-

$$f_\xi(x)=\begin{cases}1/(b-a), & x\in[a,b]\\ 0, & x\notin[a,b]\end{cases}.$$

$$E[\xi]=(b+a)/2\ ,\quad Var(\xi)=(b-a)^2/12.$$

ξ הוא משתנה מקרי **מעריכי** עם פרמטר $\lambda>0$, אם פונקציית הצפיפות שלו נתונה על-ידי-

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

$$E[\xi]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_\xi(x)dx\qquad E[g(\xi)]=\int_0^\infty g(x)f_\xi(x)dx\ ,\quad E[a\xi+b\eta]=aE[\xi]+bE[\eta]$$

ξ : ($\xi=N(\mu,\sigma^2)$) **התפלגות נורמאלית,** עם פרמטרים μ ו- σ^2

$$-\infty<x<\infty\ ,\qquad f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\ ,$$

$$E[\xi]=\mu\ ,\qquad Var(\xi)=\sigma^2$$

$$Z=N(0,1)\ ,\qquad \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy=F_{N(0,1)}(x)=F_Z(x)\ ,\quad \Phi(-x)=1-\Phi(x)\ ,$$

$$F_{N(\mu,\sigma^2)}(x)=P\{N(\mu,\sigma^2)<x\}=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$Cov(\xi,\eta)=E[(\xi-E[\xi])(\eta-E[\eta])]$$

$$Cov(\xi,\eta)=Cov(\eta,\xi)\ ,\quad Cov(\xi,\xi)=Var(\xi)\ ,\quad Cov(\xi,\eta)=E[\xi\eta]-E[\xi]E[\eta]$$

מקדם-**המתאם** בין שני משתנים מקריים ξ **ו** η מסומנת ב- $\rho(\xi,\eta)$, (אם $\rho(\xi,\eta)=0$, אומרים ש ξ **ו** η **בלתי-מתואמים**)

$$\rho(\xi,\eta)=\frac{Cov(\xi,\eta)}{\sqrt{Var(\xi)Var(\eta)}}$$

המשתנים המקריים $\xi_1,\dots,\xi_n$ הם בלתי תלויים, אם לכל n קבוצות של מספרים ממשיים $A_1,\dots,A_n$ מתקיים

$$P\{\xi_1\in A_1,\dots,\xi_n\in A_n\}=P\{\xi_1\in A_1\}\cdot\ldots\cdot P\{\xi_n\in A_n\}$$

(אי-שוויון צ'בישב) אם ξ הוא משתנה מקרי שתוחלתו μ ושונות $Var(\xi)$ הם סופיות, אז לכל ערך חיובי a מתקיים-

$$P\{|\xi-\mu|\ge a\}\le\frac{Var(\xi)}{a^2}.$$

משפט הגבול המרכזי: תהי $\xi_1,\dots,\xi_n$ סדרה של משתנים מקריים בלתי-תלויים ושווי-התפלגות, שלכל אחד מהם תוחלת סופית μ ושונות סופית σ^2, אז

$$n\to\infty\ ,\qquad P\{\frac{\xi_1+\ldots+\xi_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le x\}\to\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}dy.$$

. הקירוב הנורמאלי להתפלגות הבינומי (עם תיקון רציפות): אם $\xi\sim B(n,p)$ אזי עבור n מספיק גדול קיים:

$$. P(\xi \le k) = P(\xi \le k + 1/2) \cong \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$, S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_n})^2 \qquad \overline{X_n} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\left[\overline{X} - z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \qquad , Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n} \qquad , E\overline{X_n} = \mu$$

גודל המדגם הדרוש כדי שברמת בטחון $1-\alpha$, הסתיה בין μ לבין $\overline{X}$ (חצי אורך הרווך הרשום לעיל) לא תעלה על d הוא:

$$. n \ge \frac{z^2_{1-\alpha/2} \cdot \sigma^2}{d^2}$$

רווח בר-סמך ברמת סמך מקורבת $1-\alpha$ עבור פרופורציה p של "הצלחות" באוכלוסיה נתן על ידי:

$$\left[\overleftrightarrow{p} - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overleftrightarrow{p}(1-\overleftrightarrow{p})}{n}}, \overleftrightarrow{p} + z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\overleftrightarrow{p}(1-\overleftrightarrow{p})}{n}}\right]$$

כאשר $\overleftrightarrow{p} = \overline{X} = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ היא פרופורציות ה"הצלחות" במדגם בגודל n.

גודל המדגם המבטיח שברמת סמך $1-\alpha$, הסתיה בין p לבין $\overleftrightarrow{p}$ (חצי אורך הרווך הרשום לעיל) לא תעלה על d הוא: $n \ge \frac{z^2_{1-\alpha/2}}{d^2 4}$

העוצמה המבחן המוגדר ב-1, אם למעשה $\mu = \mu_1 < \mu_0$, היא:

$$\pi(\mu_1) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu_1)}{\sigma} - z_{1-\alpha}\right)$$

גודל המדגם n הדרוש להשגת עצומה π לפחות, עבור ערך אלטרנטיבי מסוים μ_1, אם משתמשים באחד מהמבחנים החד-צדדיים 1 או 2 לעיל, צריך לקיים:

$$. n \ge \frac{(z_{1-\alpha} + z_\pi)^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

נדון מדגם בגודל n מהתפלגות נורמאלית - $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, עם שונות σ^2 **לא ידועה**. לבדיקת השערה לגבי התוחלת $H_0 : \mu = \mu_0$ סטטיסטי המבחן הוא

$$T = \frac{\overline{X_n} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

תחת השערת האפס T הוא בעל התפלגות t עם $n-1$ דרגות חופש. המבחינים המתאימים הם:

1. כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu < \mu_0$ דוחים את השארת האפס עבור $t < -t_{1-\alpha,n-1}$.

2. כנגד האלטרנטיבה $H_1 : \mu > \mu_0$ דוחים את השארת האפס עבור $t > t_{1-\alpha,n-1}$.

3. כאשר האלטרנטיבה היא דו-צדדית $H_1 : \mu \ne \mu_0$ דוחים את השארת האפס עבור $|t| > t_{1-\alpha/2,n-1}$.

רווח בר-סמך ברמת סמך $1-\alpha$ עבור התוחלת μ ניתן על ידי:

$$. \overline{X} \pm t_{1-\alpha/2,n-1} S/\sqrt{n}$$

נתונים שני מדגמים בלתי תלויים מהתפלגות נורמאלית עם אותו שונות:

$$X_i \sim N(\mu_X, \sigma^2), i = 1, \ldots, m; \qquad Y_j \sim N(\mu_Y, \sigma^2), j = 1, \ldots, n$$

לבדיקת השערת שוויון התוחלת $H_0 : \mu_X = \mu_Y$, סטטיסטי המבחן הוא

$$T=\frac{\overline{X_m}-\overline{Y_n}}{\sqrt{S^2(1/m+1/n)}}$$

כאשר S^2 הוא האומד הבלתי מוטה עבור σ^2, המבוסס על שני המדגמים:

$$S^2=\frac{1}{m+n-2}\left[\sum_{i=1}^{m}(X_i-\overline{X})^2+\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\overline{Y})^2\right]$$

תחת השערת האפס T הוא בעל התפלגות t עם $m+n-2$ דרגות חופש. המבחינים המתאימים הם:

1. כנגד האלטרנטיבה $H_1:\mu_X<\mu_Y$ דוחים את השארת האפס עבור $t<-t_{1-\alpha,m+n-2}$.

2. כנגד האלטרנטיבה $H_1:\mu_X>\mu_Y$ דוחים את השארת האפס עבור $t>t_{1-\alpha,m+n-2}$.

3. כאשר האלטרנטיבה היא דו-צדדית $H_1:\mu_X\neq\mu_Y$ דוחים את השארת האפס עבור $|t|>t_{1-\alpha/2,m+n-2}$.

רווח בר-סמך ברמת סמך $1-\alpha$ עבור הפרש התוחלת $\mu_X-\mu_Y$ ניתן על ידי:

$$\overline{X}-\overline{Y}\pm t_{1-\alpha/2,m+n-2}S\sqrt{(1/m+1/n)}$$

נתונות n תצפיות מזווגות - (X_i,Y_i) מאותה התפלגות משותפת. מדגמים $D_i=X_i-Y_i$, $(i=1,...,n)$.

הנחה: $D_i\sim N(\mu_D,\sigma_D^2)$ $(i=1,...,n)$.

לבדיקת השערת האפס לגבי הפרשן התחולות (או תוחלת ההפרש) $H_0:\mu_D=a$, סטטיסטי המבחן הוא

$$T=\frac{\sqrt{n}(\overline{D}-a)}{S_D}.$$

תחת השערת האפס T הוא בעל התפלגות t עם $n-1$ דרגות חופש. המבחינים המתאימים זהים למבחנים שהוגדרו עבור מדגם אחד מהתפלגות נורמאלית בעלת שונות לא ידועה (טענה 4). **רווח בר-סמך** ברמת סמך $1-\alpha$ עבור הפרש התוחלת μ_D ניתן על ידי:

$$\overline{D}\pm t_{1-\alpha/2,n-1}S_D/\sqrt{n}.$$

נתונים שני מדגמים בלתי תלויים של משתני ברנולי יהיו: X - מספר ה"הצלחות" במדגם בגודל m, $X\sim B(m,p_X)$, Y - מספר ה"הצלחות" במדגם בגודל n, $Y\sim B(n,p_Y)$. סטטיסטי המבחן לבדיקת $H_0:p_X=p_Y$ הוא:

$$Z=\frac{X/m-Y/n}{\sqrt{\frac{X+Y}{m+n}\left(1-\frac{X+Y}{m+n}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}}$$

אם H_0 נחונה, Z מתפלג בקירוב נורמאלית סטנדרטית.

רווח בר-סמך ברמת סמך מקורבת $1-\alpha$ עבור p_X-p_Y ניתן על ידי:

$$X/m-Y/n\pm z_{1-\alpha/2}\sqrt{X(1-X/m)m^{-2}+Y(1-Y/n)n^{-2}}.$$