תורת ההסתברות

מושגי יסוד

ניסוי אקראי

הגדרה

אם לא ניתן לדעת מראש את תוצאת הניסוי, הוא נקרא "ניסוי אקראי".

דוגמאות

הטלת מטבע או קוביה; הטלת מטבע עד קבלת "עץ"; המתנה לאוטובוס; זמן חיים של מוצר חשמלי עד תקלה.

מרחב מדגם

הגדרה

כל התוצאות האפשריות של ניסוי אקראי נקראות "מרחב המדגם".

דוגמאות

- בהטלת מטבע פעמיים, מרחב המדגם הוא: $\Omega=\{(1,0);(0,1);(1,1);(0,0)\}$
- בהטלת מטבע עד קבלת "עץ": $\Omega=\{(1);(0,1);(0,0,1),\ldots\}$
- בעת המתנה לאוטובוס: $\Omega=\{t/0\le t\le 15\}$
- זמן החיים של מכשיר חשמלי: $\Omega=\{t/0\le t\le \infty\}$

מאורע

הגדרה

כל תת-קבוצה של מרחב המדגם נקראת "מאורע".

תת-הקבוצה הקטנה ביותר: מאורע ריק. מאורע שלא יתרחש.

תת-הקבוצה הגדולה ביותר: אומגה (מאורע ודאי). מאורע שתמיד יתרחש.

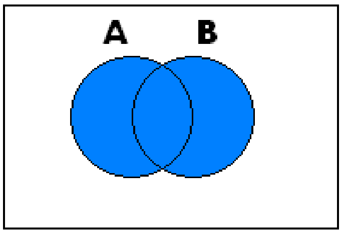
פעולות עם מאורעות

איחוד של מאורעות

הגדרה

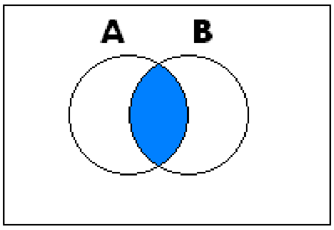
מאורע $A=\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$ נקרא איחוד מאורעות $A_1\ldots A_n$ אם:

מאורע A מתרחש $\Leftrightarrow$ לפחות אחד מהמאורעות $A_1\ldots A_n$ מתרחש.



חיתוך של מאורעות

<u>הגדרה</u>

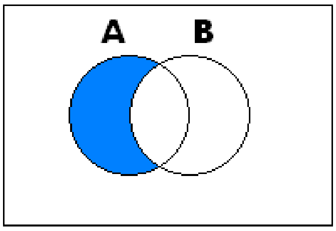


מאורע $A=\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)$ נקרא חיתוך מאורעות $A_1...A_n$ אם:

מאורע A מתרחש $\Leftrightarrow$ כל אחד מהמאורעות $A_1...A_n$ מתרחש.

חיסור של מאורעות

<u>הגדרה</u>



מאורע $C=A\setminus B$ נקרא חיסור של מאורעות A ו-B אם:

C מתרחש $\Leftrightarrow$ A מתרחש וגם B לא מתרחש.

הגדרות נוספות

מאורע משלים

<u>הגדרה</u>

מאורע $\overline{A}=\Omega\setminus A$ נקרא "משלים של מאורע A". $A\setminus B=A\cap\overline{B}$.

מאורעות זרים

<u>הגדרה</u>

אם $A\cap B=\phi$ אז נאמר ש-A ו-B זרים. $\overline{\varnothing}=\Omega;\overline{\Omega}=\varnothing$.

תכונות של פעולות

חוקי דה-מורגן

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}\qquad\qquad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$$

טבלת 2X2

	B	$\overline{B}$
A	$A\cap B$	$A\cap\overline{B}$
$\overline{A}$	$\overline{A}\cap B$	$\overline{A}\cap\overline{B}$

<u>דוגמה</u>

$$A=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\qquad\qquad A\cup B=(A\cap B)\cup\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cup B\right)$$

מרחב הסתברות

הגדרה

נתון ניסוי אקראי. אם שלישיה $(\Omega, f, P(A))$ מקיימת:

Ω – מרחב המדגם.

f – אוסף של מאורעות העונה לתנאי σ-אלגברה (קיימים מאורעות קטן ביותר וגדול ביותר; איחוד כל המאורעות שייך גם הוא לקבוצה; חיתוך כל מספר סופי של מאורעות שייך גם הוא לקבוצה).

$P(A)$ – פונקציית ההסתברות של $A \in f$, המקיימת את האקסיומות הבאות:

א. $P(A) \geq 0$

ב. $P(\Omega)=1$

ג. אם A ו-B זרים, $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$. ובהכללה:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots$$

אזי היא נקראת "מרחב ההסתברות".

מסקנות מאקסיומות

1. $P(\overline{A})=1-P(A)$.

הוכחה

$A \cup \overline{A}=\Omega$. מכאן $P(A)+P(\overline{A})=1$.

2. $P(\phi)=0$

3. אם $A \subseteq B$, אזי $P(A) \leq P(B)$

הוכחה

$B=(B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$. מכיוון שהמאורעות זרים: $P(B \cap A)=A$, לכן $P(B)=P(A)+P(B \cap \overline{A})$. מכך שההסתברות תמיד אי שלילית, נובע ש-$P(A) \leq P(B)$.

4. $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

עבור n אירועים:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i,j=1(i\neq j)}^{n} P(A_i \cap A_j)+\sum_{i,j,k=1(i\neq j\neq k)}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k)-\ldots$$

הוכחת הנוסחה הראשונה

ע"י שימוש בטבלת 2X2:

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$$

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$$

$$P(A\cup B)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$$

לאחר צמצום: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

דוגמאות למרחב הסתברות

מרחב הסתברות אלמנטרי

הגדרה

שלישיה $(\Omega, f, P(A))$ נקראת "מרחב הסתברות אלמנטרי" אם:

$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,...\}$

f – קבוצה של כל המאורעות.

$P(A)$ – מוגדרת פונ' $P(\omega_k)=P_k\geq 0$, כך ש- $\sum_{k=1}^{\infty}P_k=1$ וגם $P(A)=\sum_{\omega_k\in A}P(\omega_k)$.

הוכחה כי P(A) היא פונ' הסתברות

1. $P(A)\geq 0$
2. $P(\Omega)=\sum_{\omega_k\in\Omega}\omega_k=\sum_{k=1}^{\infty}P_k=1$
3. נניח ש- $(A\cap B)=\varnothing$. אזי: $P(A\cup B)=\sum_{\omega_k\in(A\cup B)}P(\omega_k)=P(A)+P(B)$.

דוגמה

נגדיר שלישיה $(\Omega, f, P(A))$, זריקת מטבע עד קבלת "עץ":

$\Omega=\{1,01,001,...\}$

f – כל תתי הקבוצות של Ω.

$P(1)=1/2; P(01)=1/4; P(0...1)=1/2^k$

<u>כעת יש להוכיח כי סכום כל הפונקציות שווה 1:</u>

מדובר בסכום סדרה הנדסית אינסופית, בה $q=1/2$. $S=\frac{a}{1-q}=\frac{1/2}{1-1/2}=1$.

מכאן נובע כי השלישיה הנ"ל הינה מרחב הסתברות אלמנטרי.

מרחב הסתברות סימטרי

הגדרה

שלישיה $\left(\Omega, f, P(A)\right)$ נקראת "מרחב הסתברות סימטרי" אם :

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n\}$.

f – כל תתי הקבוצות של Ω.

$P(\omega_1) = P(\omega_2) = ...P(\omega_n) = 1/n$.

$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\omega_k) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

<u>תרגיל</u>

מטילים קוביה פעמיים.

א. הגדר את מרחב ההסתברות

ב. מצא את ההסתברות של A – הסכום המתקבל הוא 5.

<u>פתרון</u>

א. $\Omega = \{(i, j) / i \in (1,2,3,4,5,6), j \in (1,2,3,4,5,6)\}$.

ב. הקבוצה היא סופית, ולכל תוצאה יש אותו סיכוי. לכן מרחב ההסתברות הוא סימטרי. $|\Omega| = 6 \cdot 6 = 36$. $A = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$. מכאן $|A| = 4$, ולכן $P(A) = 4/36 = 1/9$

קומבינטוריקה ומרחב הסתברות גיאומטרי

קומבינטוריקה

עקרון הכפל

נניח שניסוי אקראי מורכב מ-m שלבים, כך שלשלב הראשון יש n_1 תוצאות אפשריות, לשלב השני n_2 תוצאות, וכן הלאה עד n_m.

אזי גודל מרחב המדגם יהיה: $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_m$.

<u>שאלה</u>

כמה מספרים זוגיים בני 5 ספרות קיימים?

<u>**פתרון**</u>

את הניסוי ניתן לחלק ל-5 שלבים, לפי מס' הספרות במספר.

$n_1 = 9, n_2 = n_3 = n_4 = 10, n_5 = 5$.

לכן מס' המספרים הזוגיים בעלי 5 ספרות הוא: $9 \cdot 10^3 \cdot 5 = 45,000$.

אופני הדגימה

- עם וללא החזרה.
- עם וללא סדר.

מכאן, קיימים 4 סוגים שונים של מדגמים.

מדגמים עם סדר ועם החזרה

משפט

מספר המדגמים בגודל k מסוג זה שאפשר לבחור מ-n איברים שונים, שווה ל- n^k.

<u>שאלה</u>

כמה מלים בגודל 4 אותיות ניתן להרכיב מ-6 אותיות שונות?

<u>**פתרון**</u>

k=4, n=6.

$n^k = 6^4$

מדגמים עם סדר וללא החזרה

משפט

מספר המדגמים בגודל k שנבחרו מקבוצה בת n איברים שווה ל- $\frac{n!}{(n-k)!}$.

			..	
	-1	-2		-k+1

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-k-1)\dots1}{(n-k)(n-k-1)\dots1}=\frac{n!}{(n-k)!}$$

<u>שאלה</u>

מרכיבים מילה בגודל 4 אותיות, מ-6 אותיות שונות.

מה ההסתברות שבמילה יש אותיות זהות?

<u>פתרון</u>

נרכיב מרחב הסתברות $\left(\Omega, f, P(A)\right)$:

$\Omega=\{$כל המדגמים בגודל 4 שנבחרו מ-6 איברים עם סדר וללא החזרה$\}$

$f=$ אוסף של כל תתי הקבוצות של Ω.

$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

נסמן את המאורע A : במילה יש אותיות זהות.

$|\Omega|=6^4$.

מכיוון שדרך החישוב היא מסובכת, נחשב ע"י שימוש במשלים.

$\overline{A}$: כל האותיות במילה שונות (מדגם עם סדר ללא החזרה). $|\overline{A}|=\frac{6!}{(6-4)!}=360$.

מכאן, התשובה היא: $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{6!}{2!\cdot 6^4}=0.722$.

סדר בין איברים (תמורות)

משפט

בקבוצה בת n איברים, יש n! תמורות.

<u>שאלה 1</u>

במדף יש 5 ספרי מתמטיקה, 4 ספרי פיזיקה ו-3 ספרי אנגלית. כל הספרים שונים.

מה ההסתברות שכל הספרים באותו מקצוע עומדים יחד במדף?

<u>פתרון</u>

$\Omega=\{$כל התמורות בגודל 12$\}$. $|\Omega|=12!$

מרחב ההסתברות המתקבל הוא סימטרי.

נסמן A : בכל מקצוע עומדים הספרים יחדיו.

$|A| = 5!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 3! = 103,680$ (סידור ספרי המתמטיקה, הפיזיקה והאנגלית בנפרד, וסידור המקצועות השונים זה ביחס לזה).

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 2.16\cdot 10^{-4}$.

שאלה 2

בשורה נמצאים 10 אנשים.

מה ההסתברות שבין שני אנשים מסויימים נמצאים בדיוק k אנשים?

פתרון

$\Omega = \{$כל התמורות בגודל 10$\}$. $|\Omega| = 10!$

מרחב ההתסברות המתקבל הוא סימטרי.

נסמן A : בין שני אנשים מסויימים יש k אנשים.

$|A| = \frac{8!}{(8-k)!}\cdot 2\cdot(8-k+1)!$ (בחירת k אנשים מתוך 8 ; הוספת השניים המסויימים בקצוות ; סידור כל האיברים בשורה, כאשר אנחנו מתייחסים לשני האנשים המסויימים והאנשים שביניהם, כאיבר אחד).

$|A| = 8!\cdot 2\cdot(9-k)$; $P(A) = \frac{8!\cdot 2\cdot(9-k)}{10!} = \frac{(9-k)}{45}$.

מדגמים ללא סדר וללא החזרה (צירופים)

משפט

מספר הצירופים בגודל k שנבחרו מקבוצה בת k איברים שנבחרו מקבוצה בת n איברים שווה ל- $\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

הוכחה

נחשב את מספר המדגמים עם סדר, ללא החזרה, בשתי דרכים :

א. לפי הנוסחא : $\frac{n!}{(n-k)!}$.

ב. לפי שלבים :
בשלב הראשון בוחרים קבוצה ללא סדר.
בשלב השני, מסדרים את הקבוצה.
אז נקבל :

בשלב הראשון מספר צירופים בגודל k. נסמן אותו $\binom{n}{k}$.

בשלב השני $k!$ אפשרויות.

בסופו של דבר : $\binom{n}{k}\cdot k!$.

מכך ש- $\frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k}k!$ נובע ש : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. $\binom{n}{k}$ נקרא "המקדם

הבינומי", מכיוון שמשתמשים בו בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$.\left(a+b\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}\cdot b^{n-k}$$

<u>תכונות של צירופים</u>

א. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

ב. $1=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}$

ג. $2^{n}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}$. מסקנה: מספר כל תתי הקבוצות של קבוצה בת n איברים שווה ל- 2^{n}.

<u>שאלה</u>

בקלפים יש 4 צבעים. בכל צבע יש 13 קלפים שונים.

נבחרו 3 קלפים.

נסמן את המאורעות הבאים:

A: נבחר בדיוק "אס" אחד.

B: נבחרו בדיוק שני "אסים".

C: נבחר לפחות "אס" אחד.

<u>פתרון</u>

$\Omega=${כל הצירופים בגודל 3 שנבחרו מ-52 איברים}. $|\Omega|=\binom{52}{3}=\frac{52!}{3!\cdot 49!}$.

מרחב ההסתברות המתקבל הוא סימטרי.

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\binom{4}{1}\binom{48}{2}}{\binom{52}{3}}$$

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{\binom{4}{2}\binom{48}{1}}{\binom{52}{3}}$$

$$P(C)=\frac{|C|}{|\Omega|}=1-\frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}$$

מדגמים ללא סדר עם החזרה

משפט

מספר המדגמים בגודל k שנבחרו מקבוצה בגודל n שווה ל- $\binom{n+k-1}{k}$.

<u>שאלה</u>

נתונה פונקציה של 4 משתנים $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$. כמה נגזרות שונות מסדר 3 קיימות לפונקציה f הנ"ל?

<u>פתרון</u>

ידוע מחדו"א שסדר הגזירה אינו חשוב. לכן עלינו לבחור מדגם בגודל 3 איברים מ-4, ללא סדר ועם החזרה.

$$P(A)=\binom{4+3-1}{3}=\binom{6}{3}.$$

מרחב הסתברות גיאומטרי

הגדרה

שלישיה $\left(\Omega, f, P(A)\right)$ נקראת "מרחב הסתברות גיאומטרי" אם:

$\Omega =$ תחום מסוים במישור.

$f =$ אוסף כל תתי-הקבוצות של Ω בעלות שטח חיובי, בתוספת $\varnothing$.

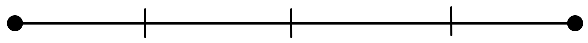
$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

שאלות

שאלה 1

מקל נשבר ל-3 חלקים. מה ההסתברות שמחלקים אלה ניתן להרכיב משולש?

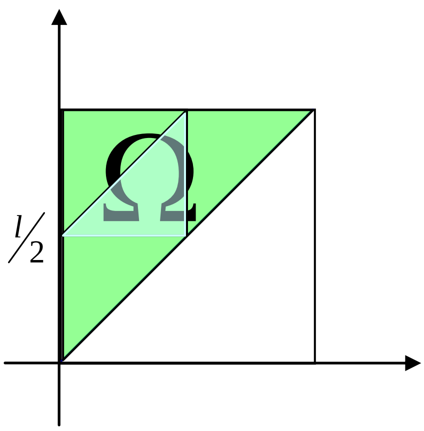
פתרון



$$0<x<y<l$$

כיצד נבחר את הזוג (x,y) כך שיתקיים: $\begin{cases} x<l-x \\ y>l-y \\ y-x<x+l-y \end{cases}$?

$\begin{cases} x<l/2 \\ y>l/2 \\ y-x<l/2 \end{cases}$. נעבור למערכת קואורדינטות:



$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{1}{4}\ .$$

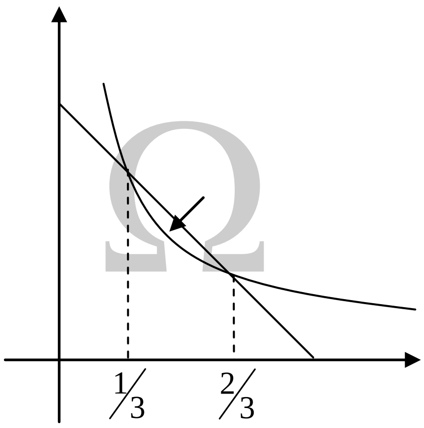
<u>שאלה 2</u>

נתונים שני מספרים. מה ההסתברות שסכומם קטן מ-!, ומכפלתם גדולה מ- $\frac{2}{9}$?

<u>פתרון</u>

$$x+y<1$$

$$xy>\frac{2}{9}$$



$$S(A)=\int_{1/3}^{2/3}\left(y_2-y_1\right)dx=\int_{1/3}^{2/3}\left[\left(1-x\right)-\frac{2}{9x}\right]dx=\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\ln 2$$

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=S(A)$$

הסתברות מותנית

כאשר יש שימוש במידע נוסף, מעבר למרחב ההסתברות שלנו, נשתמש בהסתברות מותנית.

<u>הגדרה</u>

נתון מרחב הסתברות $\left(\Omega, f, p(A)\right)$:

נניח ש- $B\in f$ מאורע עם $p(B)\neq 0$.

נגדיר מרחב הסתברות חדש $\left(\Omega, f, p_B(A)\right)$ כך ש- $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$.

אז $p_B(A)$ נקראת "הסתברות מותנית" או "הסתברות של מאורע A, בתנאי שמאורע B כבר התרחש."

נראה ש- $p_B(A)$ היא פונקצית הסתברות :

א. $p(B)\geq 0$, לפי הגדרה.

ב. $p_B(\Omega)=\dfrac{p(\Omega\cap B)}{p(B)}=\dfrac{p(B)}{p(B)}=1$

ג. נניח ש- $(A_1\cap A_2)=\varnothing$:

$$p_B(A_1\cup A_2)=\frac{p\left[(A_1\cup A_2)\cap B\right]}{p(B)}=\frac{p\left[(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\right]}{p(B)}$$

החיתוכים זרים, לכן : $\dfrac{p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)}{p(B)}=p_B(A_1)+p_B(A_2)$.

כאשר לא ידוע אם המאורעות זרים : $p_B(A_1\cup A_2)=p_B(A_1)+p_B(A_2)-p_B(A_1\cap A_2)$

סימון: $p_B(A)=p(A|B)$

<u>תרגיל</u>

מטילים קוביה פעמיים, בזה אחרי זה.

מה ההסתברות שבפעם הראשונה קיבלנו "1", אם ידוע שסכום התוצאות הוא 7?

<u>פתרון</u>

נגדיר את מרחב ההסתברות : $\Omega=\left\{(i,j),1\leq i,j\leq 6\right\}$. (התקבל מרחב סימטרי)

נסמן מאורע A : בהטלה הראשונה קיבלנו "1".

נסמן מאורע B : סכום התוצאות הוא 7.

יש למצוא את $p(A|B)$:

$$p(A|B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}$$
$$p(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$
$$p(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}=\frac{1}{36}$$
$$\Downarrow$$
$$p(A|B)=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$$

חישוב הסתברות של חיתוך ע"י הסתברות מותנית

משפט

א. $p(A\cap B)=p(B)\cdot p(A|B)=p(A)\cdot p(B|A)$

ב. $p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B|A)\cdot p(C|A\cap B)$ (הסתברות של C, בתנאי שגם מאורע A וגם מאורע B התרחשו).

ג. $p(A_1\cap A_2\cap ...\cap A_n)=p(A_1)\cdot p(A_2|A_1)\cdot ...\cdot p(A_n|A_1\cap A_2\cap ...\cap A_{n-1})$

<u>תרגיל</u>

בכד 6 כדורים לבנים, 5 שחורים ו-4 אדומים. מוציאים בזה אחר זה 4 כדורים. מהי ההסתברות שהראשון והאחרון לבנים, השני שחור והשלישי אדום?

<u>פתרון</u>

מרחב המדגם: $\Omega=\{(a,b,c,d)$, כאשר a,b,c,d צבע מסויים במקום מסויים$\}$

נסמן:

$A_1=$ מקבלים "לבן" בבחירה הראשונה.

$A_2=$ מקבלים "שחור" בבחירה השנייה.

$A_3=$ מקבלים "אדום" בבחירה השלישית.

$A_4=$ מקבלים "לבן" בבחירה הרביעית.

$$p(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4)=p(A_1)\cdot p(A_2|A_1)\cdot p(A_3|A_1\cap A_2)\cdot p(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3)$$
$$=\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot\frac{5}{12}$$

אי-תלות של מאורעות

הגדרה

נאמר שמאורעות A ו-B בלתי תלויים אם $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)$. אחרת הם נקראים תלויים.

אם בין מאורעות אין קשר, אזי הם בלתי תלויים.

משפט

א. אם נתון $p(A)\neq 0, p(B)\neq 0$ ו-A ו-B בלתי-תלויים (ב"ת), אזי $p(A|B)=p(A)$ ו-$p(B|A)=p(B)$.

ב. אם A ו-B ב"ת, אז A ו-$\overline{B}$ ב"ת, $\overline{A}$ ו-B ב"ת ו-$\overline{A}$ ו-$\overline{B}$ ב"ת.

תרגיל

בן אדם קונה 10 כרטיסים ללוטו. נניח שהסתברויות הזכיה בכל הכרטיסים אינן תלויות, והסתברות הזכיה בכרטיס אחד היא P. מה ההסתברות שלפחות אחד מן הכרטיסים יזכה?

פתרון

נסמן:

$A_i=$ כרטיס i זכה $i\in\{1,2,...,10\}$.

A= לפחות אחד מן הכרטיסים זכה.

נחשב את המשלים:

$$p(\overline{A})=p(\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap...\cap\overline{A_{10}})=p(\overline{A_1})\cdot p(\overline{A_2})\cdot...\cdot p(\overline{A_{10}})=(1-P)^{10}$$

מכאן, ההסתברות ל-A היא: $p(A)=1-(1-P)^{10}$.

הקשר בין מאורעות זרים למאורעות ב"ת:

אם A ו-B זרים, אזי הם תלויים!

הוכחה

נניח ש- $p(A),p(B)\neq 0$.

נתון: $p(A\cap B)=0$. אז $p(A\cap B)\neq p(A)\cdot p(B)\neq 0$, ולכן הם תלויים.

במושג "מאורעות זרים" נשתמש רק בחישוב הסתברות של איחוד.

במושג "מאורעות בלתי-תלויים" נשתמש רק בחישוב הסתברות של חיתוך.

נוסחת ההסתברות השלמה

משפט

נתון:

מאורעות $B_1, B_2, \ldots, B_n$ זרים, ו- $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$. כלומר – בכל הניסוי מתרחש בדיוק אחד מכל המאורעות הללו.

אזי, לכל מאורע A יתקיימו:

א. $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p(A \mid B_i)$ (נוסחת ההסתברות השלמה).

ב. $$p(B_k \mid A) = p(B_k) \cdot \frac{p(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p(A \mid B_i)}$$

הוכחה

א. לפי הגדרה: $A = A \cap \Omega = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)_i$.

לכן: $$p(A) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)\, p(A \mid B_i)$$

ב. ידוע ש- $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(A \mid B) = p(B) \cdot p(B \mid A)$.

אזי: $p(B \mid A) = \frac{p(B) \cdot p(A \mid B)}{p(A)}$, ולאחר הצבה נקבל:

$$p(B_k \mid A) = p(B_k) \cdot \frac{p(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(B_i) \cdot p(A \mid B_i)}$$ (נוסחת בייז)

תרגיל

במפעל יש 4 מכונות המייצרות מוצר מסוים.

מכונה א' מייצרת 20% מכלל המוצרים, ו-3% מהתוצרים שלה פגומים.

מכונה ב' מייצרת 50% מכלל המוצרים, ו-5% מהתוצרים שלה פגומים.

מכונה ג' מייצרת 10% מכלל המוצרים, ו-1% מהתוצרים שלה פגומים.

מכונה ד' מייצרת 20% מכלל המוצרים, ו-3% מהתוצרים שלה פגומים.

א. מה אחוז המוצרים הפגומים בכלל הייצור?

ב. מה אחוז המוצרים ממכונה ב' באוכלוסיית המוצרים הפגומים?

פתרון

א. נסמן: A= מוצר שנבחר באקראי הוא פגום. צ"ל p(A)?
נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה, מכיוון שחסרה לנו אינפורמציה על המוצר.

נסמן: $B_i =$ מוצר ממכונה i $\left(i \in \{1,2,3,4\}\right)$.

$$p(A)=p(B_1)\cdot p(A|B_1)+p(B_2)\cdot p(A|B_2)+p(B_3)\cdot p(A|B_3)+p(B_4)\cdot p(A|B_4)$$
$$=0.2\cdot 0.03+0.5\cdot 0.05+0.1\cdot 0.01+0.2\cdot 0.03=0.038=3.8\%$$

ב. $p(B_2\,|\,A)=\dfrac{p(B_2)\cdot p(A|B_2)}{p(A)}=\dfrac{0.5\cdot 0.05}{0.038}=0.66=66\%$

תרגיל

בכד א' נמצאים 6 כדורים שחורים ו-4 לבנים.

בכד ב' נמצאים 6 כדורים לבנים ו-4 שחורים.

מכד מסויים נבחרו בזה אחרי זה שני כדורים, ללא החזרה.

א. מהי ההסתברות שהכדור השני הוא לבן?

ב. נתון שהכדור השני לבן. מה ההסתברות שהוא נבחר מכד א'?

פתרון

א. נסמן:

A=הכדור השני שנבחר הוא לבן. צ"ל p(A).

$B_1=$נבחר כד א', והכדור הראשון הוא לבן.

$B_2=$נבחר כד א', והכדור הראשון הוא שחור.

$B_3=$נבחר כד ב', והכדור הראשון הוא לבן.

$B_4=$נבחר כד ב', והכדור הראשון הוא שחור.

$$p(A)=\sum_{i=1}^{n}p(B_i)\cdot p(A|B_i)=$$
$$=(0.5\cdot 4/10)\cdot 3/9+(0.5\cdot 6/10)\cdot 4/9+(0.5\cdot 6/10)\cdot 5/9+(0.5\cdot 4/10)\cdot 6/9=0.5$$

ב. צ"ל: $p(B_1\cup B_2\,|\,A)$.

מכיוון ש- B_1, B_2 זרים, ניתן להשתמש בנוסחת בייז:

$$p(B_1\cup B_2\,|\,A)=p(B_1\,|\,A)+p(B_2\,|\,A)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}}{0.5}$$

משתנה מקרי בדיד

הגדרה

נניח שמרחב המדגם Ω כולל מספר סופי או סדרה של איברים (קבוצה בת מניה).
אז כל פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$ נקראת "משתנה מקרי בדיד".

דוגמא

מטילים קוביה פעמיים.

$$\Omega=\{(i,j),1\le i,j\le 6\}$$

נסמן: X- סכום תוצאות ההטלות.

$$X:\Omega\to\mathbb{R}\ ;\ X(\{i,j\})=i+j$$

נגדיר: M – כל הערכים האפשריים של X.

נסמן: $M=\{x_1,x_2,...,x_n\}$.

בדוגמא שלנו: $M=\{2,3,...,12\}$.

פונקצית הסתברות ופונקצית התפלגות

הגדרה

נתון מרחב הסתברות אלמנטרי $(\Omega,f,p(A))$, ומ"מ בדיד X.

נסמן $M=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ קבוצה של ערכים אפשריים של X. הפונקציה $f_x(x_n)=p(X=x_n)$ נקראת "פונקצית ההסתברות של מ"מ X".

דוגמא

בהמשך לדוגמא הקודמת, נמצא את פונקצית ההסתברות של X

$$f_x(x_n)=p(X=x_n)=\frac{|x_n|}{|\Omega|}$$

									0	1	2
(x)	/36	/18	/12	/9	/39	/6	/36	/9	/12	/18	/36

תכונות של פונקצית הסתברות

א. $0\le f_x(x_n)\le 1$

ב. $p\left(\bigcup\left(X=x_n\right)\right)=\sum_{x_n\in M}p\left(X=x_n\right)=\sum_{x_n\in M}f_x\left(x_n\right)=1$

הגדרה

נתון משתנה מקרי X. לכל מספר ממשי t נגדיר פונקציה: $F_X(t)=p(X\le t)$. אז הפונקציה נקראת "פונקצית התפלגות (מצטברת) של מ"מ X".

$$F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$$

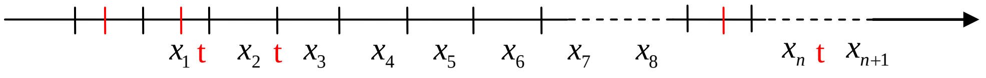
משפט

נתון מ"מ בדיד X עם קבוצת ערכים אפשריים $M=\{x_1,x_2,...,x_n,...\}$. אז:

$$F_X(t)=\sum_{x_n\le t}f_X(x_n).$$

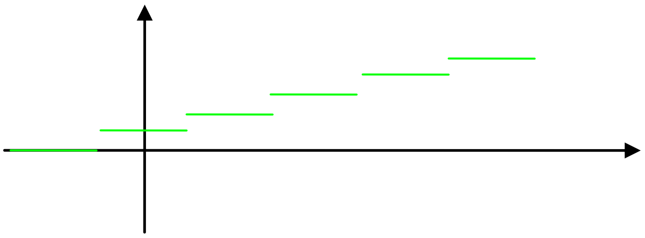
הוכחה

נחלק את ציר ה-X לערכים האפשריים:



$$F_X=\begin{cases}0 & t<x_1\\ f_X(x_1) & x_1\le t\le x_2\\ f_X(x_1)+f_X(x_2) & x_2\le t\le x_3\\ \sum_{x_k\le t}f_X(x_k) & x_n\le t\le x_{n+1}\end{cases}$$

גרף ותכונות של $F_X(t)$:



א. $0\le F_X(t)\le 1$

ב. $\lim_{t\to-\infty}F_X(t)=0;\lim_{t\to+\infty}F_X(t)=1$

ג. הפונקציה עולה. צורת הגרף – מדרגה.

ד. הפונקציה רציפה מימין.

דוגמא

בכד א׳ יש 2 כדורים לבנים, ו-3 שחורים.

בכד ב׳ יש 3 כדורים לבנים, ו-2 שחורים.

נבחר כדור מאחד הכדים.

נסמן: X – מספר הכדורים הלבנים שנשארו באותו כד.

מצא את $F_X(t)$ וצייר את גרף הפונקציה.

פתרון

נמצא קודם כל את פונקצית ההסתברות:

נסמן: A – נבחר כד א׳.

$\overline{A}$– נבחר כד ב׳.

$$f_X(1)=p(X=1)=p(A)\cdot p(X=1|A)+p(\overline{A})\cdot p(X=1|\overline{A})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{5}$$

$$f_X(2)=p(X=2)=p(A)\cdot p(X=2|A)+p(\overline{A})\cdot p(X=2|\overline{A})=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}+\frac{3}{8}=\frac{27}{40}$$

$$f_X(3)=p(X=3)=p(A)\cdot p(X=3|A)+p(\overline{A})\cdot p(X=3|\overline{A})=\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

X			
$f_X(x_n)$	/5	7/40	/8

כעת, נמצא את $F_X(t)$:

$$F_X(t)=\begin{cases} 0 & t<1 \\ \frac{1}{5} & 1\le t<2 \\ \frac{7}{8} & 2\le t<3 \\ 1 & 3\le t \end{cases}$$

משתנים מקריים בודדים מיוחדים

<u>הגדרה</u>

אוסף המשתנים המקריים בעלי שמות, נקרא אוסף המשתנים המקריים המיוחדים.

משתנה מקרי אחיד בדיד

<u>הגדרה</u>

נניח שלמשתנה מקרי X יש קבוצת ערכים $M=\{1,2,\ldots,n\}$, ופונקצית ההסתברות היא קבועה: $\forall k=1,2,\ldots,n:\ f_X(k)=\frac{1}{n}$.

אזי X נקרא "מ"מ אחיד בדיד", ונסמן: $X\sim U(1,2,\ldots n)$.

<u>דוגמא א'</u>

הטלת קוביה נסמן: X – המספר המופיע על הקוביה. אז: $X\sim U(1,2,\ldots 6)$.

<u>דוגמא ב'</u>

לאדם יש n מפתחות, והוא מנסה מפתחות אלה ללא החזרה, עד פתיחת הדלת.

נסמן: X – מספר הניסיונות.

יש למצוא את $f_X(x_k)$:

$$f_x(x_k)=\frac{n-k}{n}\cdot\frac{n-k+1}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{n-k}=\frac{1}{n}$$

X				..	
$f_X(x_k)$	/n	/n	/n	..	/n

משתנה מקרי בינומי

<u>הגדרה</u>

יש סדרה של n ניסויים בלתי תלויים זהים. בכל ניסוי יש או "הצלחה", עם הסתברות p, או "כשלון", עם הסתברות 1-p.

נסמן: X – מספר הצלחות ב-n ניסויים.

X נקרא "משתנה מקרי בינומי", וסימונו: $X\sim B(n,p)$.

משפט

אם $X\sim B(n,p)$ אז:

$$f_X(k)=\binom{n}{k}\cdot p^k(1-p)^{n-k}$$

הוכחה

יש לבחור k מקומות מתוך n מקומות, ולחשב את ההסתברות של כל אחד מהם.
לכן:

$$f_X(k)=p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

דוגמא

במבחן אמריקאי יש 5 שאלות. לכל שאלה 4 תשובות אפשריות, כאשר רק 1 מהם נכונה.

כדי לעבור את המבחן, יש לענות לפחות על 3 שאלות נכונה.

מה ההסתברות שתלמיד שעונה באקראי על המבחן יעבור אותו?

פתרון

יש סדרה של 5 ניסויים ב"ת זהים, וכל ניסוי יש הסתברות של p=0.25 להצלחה.
נסמן: X – מספר התשובות הנכונות. אז: $X\sim B(5,0.25)$.

לכן, פונקצית ההסתברות היא: $f_X(k)=\binom{5}{k}\cdot 0.25^k(0.75)^{5-k}$.

התלמיד יעבור את המבחן עבור $k=3,4,5$, לכן ההסתברות למעבר המבחן היא:

$$P=p(X=3)+p(X=4)+p(X=5)=f_X(3)+f_X(4)+f_X(5)$$

$$=\binom{5}{3}\cdot 0.25^3(0.75)^2+\binom{5}{4}\cdot 0.25^4(0.75)^1+\binom{5}{5}\cdot 0.25^5(0.75)^0=\frac{106}{4^5}=0.103$$

משתנה מקרי גיאומטרי

הגדרה

קיימת סדרה אינסופית של ניסויים ב"ת זהים. בכל ניסוי יש או "הצלחה", עם הסתברות p, או "כשלון", עם הסתברות 1-p.

נסמן: X – מספר הניסויים שנערכו עד ההצלחה הראשונה. אז X נקרא "משתנה מקרי גיאומטרי", וסימונו: $X\sim G(p)$.

משפט

אם $X\sim G(p)$, אז: $\forall k=1,2,3,\ldots:\ f_X(k)=p\cdot(1-p)^{n-k}$.

הוכחה

$$f_X(k)=p(X=k)=\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdot\ldots}_{k-1}\cdot p=p\cdot(1-p)^{k-1}$$

משפט

אם $X\sim G(p)$ אז: $p(X>k)=(1-p)^k\,;\,p(X\le k)=1-(1-p)^k$.

דוגמא

לאדם יש 10 מפתחות, והוא מנסה מפתחות אלה עם החזרה, עד פתיחת הדלת.

מה ההסתברות שלפתיחת הדלת יספיקו 10 ניסויים?

נסמן: X – מספר הניסויים עד פתיחת הדלת. אז: $X \sim G(0.1)$.

פונקצית ההסתברות: $f_X(k) = 0.1 \cdot 0.9^{k-1}$.

לכן, ההסתברות היא, לפי שתי שיטות:

$$p(X \le 10) = \sum_{k=1}^{10} 0.1 \cdot 0.9^{k-1} = 0.348$$

$$p(X \le 10) = 1 - 0.9^{10} = 0.348$$

משתנה מקרי בינומי שלילי

הגדרה

נתונה סדרת אינסופית של ניסויים ב"ת זהים. בכל ניסוי יש הצלחה עם הסתברות P.

נסמן: X – מספר הניסויים עד הצלחה מספר m.

אזי: X נקרא "משתנה מקרי בינומי שלילי" ונסמן $X \sim NB(m,P)$.

מהי $f_x(k)$?

$f_x(k)=P(X=k)=P($בניסוי k יש הצלחה **וגם** ב-k-1 ניסויים יש m-1 הצלחות$)$

$$=\binom{k-1}{m-1}\cdot P^{m-1}\cdot(1-P)^{(k-1)-(m-1)}\cdot P=\binom{k-1}{m-1}\cdot P^{m}\cdot(1-P)^{(k-1)-(m-1)}$$

$$f_x(k)=\binom{k-1}{m-1}\cdot P^{m}\cdot(1-P)^{(k-m)}$$

שאלה

מטילים מטבע עד שמקבלים "ראש" בפעם השלישית. מה ההסתברות שבשביל זה צריך להטיל את המטבע בדיוק 5 פעמים?

פתרון

נסמן: X – מספר הטלות המטבע עד קבלת "ראש" בפעם השלישית.

אזי: $X \sim NB\left(3,\frac{1}{2}\right)$, ו-$k=3,4,5,\ldots$, $f_x(k)=\binom{k-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-3}=\binom{k-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$

נציב k=5, ונמצא: $f_x(5)=\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{4\cdot3}{2}\cdot\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

משתנה מקרי פואסוני

הגדרה

נניח ש-X משתנה מקרי בדיד עם פונקצית הסתברות הנתונה לפי הנוסחה:

$$f_x(k)=e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^k}{k!},k=0,1,2,\ldots;\mu>0$$

אזי X נקרא "משתנה מקרי פואסוני" ונסמן: $X \sim P(\mu)$.

טענה

הפונקציה הנתונה היא פונקצית הסתברות.

הוכחה

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_x(k)=e^{-\mu}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu^k}{k!}=e^{-\mu}\cdot e^{\mu}=1$$

במשתנה מקרי פואסוני ייעשה שימוש בעיקר במקרים של זרם אירועים פואסוני

דוגמאות

זרם קריאות המגיעות לקו טלפון מסוים; זרם מכוניות העוברות צומת מסוים בכביש; זרם צרכנים המגיעים למרכז השירות

הגדרה

נניח שקיים זרם אירועים כך ש:

1. מספר האירועים בקטעים זרים של זמן הם בלתי תלויים.
2. מספר האירועים הנ"ל תלוי רק באורך הקטע ולא במיקום שלו.

אזי זרם זה נקרא "זרם אירועים פואסוני."

משפט

נתון זרם פואסוני. נסמן: X – מספר האירועים של זרם זה בקטע זמן t. אזי: $X \sim P(\mu = \lambda \cdot t)$, כאשר $\lambda =$ ממוצע האירועים בקטע זמן היחידה.

כלומר: $f_x(k) = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!}, k = 0,1,2,...$

תרגיל

לחנות מגיע בממוצע צרכן אחד כל רבע שעה. נניח שבכל יום העבודה מספר הצרכנים המגיעים לחנות מתפלג פואסונית.

א. מה ההסתברות שביום עבודה בן 8 שעות יגיעו לחנות בדיוק 100 צרכנים?

ב. מה ההסתברות שביום העבודה יגיעו יותר מ-100 צרכנים?

פתרון

נסמן: X - מספר הצרכנים המגיעים לחנות ב-8 שעות.

אזי: $X \sim P(\mu = \lambda t) = P(4 \cdot 8) = P(32)$, ו- $f_x(k) = e^{-32} \cdot \frac{32^k}{k!}$.

א. $k = 100 \Rightarrow f_x(100) = e^{-32} \cdot \frac{32^{100}}{100!}$

ב. $\sum_{k=101}^{\infty} e^{-32} \cdot \frac{32^k}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{100} e^{-32} \cdot \frac{32^k}{k!}$

משתנה מקרי היפר-גיאומטרי

הגדרה

קבוצה של n איברים מחולקת ל-2 קבוצות: N=A+B, כך ש-A – קבוצה של איברים מיוחדים ו-B – קבוצה של איברים לא מיוחדים.

נבחר מדגם בגודל n ללא סדר וללא החזרה.

נסמן: X – מספר האיברים המיוחדים במדגם. אזי X נקרא "משתנה מקרי היפר-גיאומטרי," ונסמן: $X \sim H(A, B, n)$.

מהי $f_x(k)$?

לפי ההגדרה: $f_x(k)=P(X=k)=\frac{|X=k|}{|\Omega|}=\frac{\binom{A}{k}\cdot\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$ (k – מספר האיברים המיוחדים במדגם).

<u>שאלה</u>

בבניין 5 קומות, ובכל קומה 4 דירות. נבחר ועד של 6 אנשים, מקסימום דייר אחד מכל דירה.

מה ההסתברות שבקומה הראשונה יש לפחות 2 אנשים בועד?

<u>פתרון</u>

נסמן: A - מספר הדירות בקומה הראשונה (4).

B – מספר הדירות בשאר הבניין (16).

n – גודל המדגם (6).

X – מספר הדיירים מהקומה הראשונה שנבחרו לועד.

אזי: $X\sim H(4,16,6)$, ו- $f_x(k)=\frac{\binom{4}{k}\cdot\binom{16}{6-k}}{\binom{20}{6}}$.

$$k=2,3,4\Rightarrow f_x(k)=\sum_{k=2}^{4}\frac{\binom{k}{4}\cdot\binom{16}{6-k}}{\binom{20}{6}}$$

סכום משתנים מקריים בודדים מיוחדים

משפט 1

נניח ש- $x_1,x_2,\ldots,x_m$ מ"מ בלתי תלויים, כך ש- $X\sim G(P)$.

אז: $X=x_1+x_2+\ldots+x_m\sim NB(m,P)$.

משפט 2

נניח ש- $x_1,x_2,\ldots,x_n$ הם ב"ת, כך ש- $x_i\sim B(n_i,P)$.

אז: $X=x_1+x_2+\ldots+x_m\sim B(n=n_1+n_2+\ldots+n_m)$

משפט 3

נניח ש- $x_1, x_2, \dots, x_n$ מ"מ ב"ת כך ש- $x_i \sim P(\mu_i)$.

אז: $X = x_1 + x_2 + \dots + x_m \sim P(\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m)$.

הוכחה

נתון: $f_{x_i}(k) = e^{-\mu_i} \cdot \frac{\mu_i^{\,k}}{k!}$. צ"ל: $f_X(k) = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$.

עבור $m=2$:

$$f_X(k) = P(X=k) = P(x_1 + x_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P\left(\underbrace{x_1 = i, x_2 = k-i}_{x_1, x_2 \text{ ב"ת}}\right) = \sum_{i=0}^{k} P(x_1 = i) \cdot P(x_2 = k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k} f_{x_1}(i) \cdot f_{x_2}(k-i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu_1} \cdot \frac{\mu_1^{\,i}}{i!} \cdot e^{-\mu_2} \cdot \frac{\mu_2^{\,k-i}}{(k-i)!} = \frac{e^{-(\mu_1+\mu_2)}}{k!} (\mu_1 + \mu_2)^k = e^{-\mu} \cdot \frac{\mu^k}{k!}$$

משתנה מקרי רציף

הגדרה

נתון מרחב מדגם Ω. מ"מ $X : \Omega \to R$ נקרא "משתנה מקרי רציף" אם קיימת פונקציה $f(X) \geq 0$ כך ש- $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. אז $F_X(x)$ נקראת פונקצית צפיפות של מ"מ רציף X.

מסקנה א'

אם X מ"מ רציף, אז $f_X(x)$ פונקציה רציפה.

מסקנה ב'

קבוצת המשתנים המקריים הבדידים וקבוצת המשתנים המקריים הרציפים הן קבוצות זרות.

מסקנה ג'

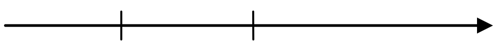
אם X מ"מ רציף, אז Ω אינה סדרה (קבוצה לא בת מניה).

מסקנה ד'

לכל ערך אפשרי x של מ"מ X, מתקיים $P(X = x) = 0$.

הוכחה

נוכיח שלכל משתנה מקרי X מתקיים: $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.



$$P(X \le b) = P(X \le a) + P(a \le X \le b) \Rightarrow F_X(b) = F_X(a) + P(a \le X \le b)$$

נניח שבנוסחא שקיבלנו $a \to b$. אז:

$$P(X = a) = \lim_{b \to a}\left[F_X(b) - F_X(a)\right] = F_X(a) - F_X(a) = 0$$

תכונות פונקצית ההתפלגות של מ"מ רציף

א. $0 \le F_X(x) \le 1$, $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1, \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

ב. $F_X(x)$ היא פונקציה רציפה.

ג. $F_X(x)$ פוני׳ עולה. אם $F_X(x) > 0$ אז $F_X(x)$ עולה ממש.

ד. $P(a \underset{\dots}{<} X \underset{\dots}{<} b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f_X(x)dx$

ה. $F_X{}'(x) = f_X(x)$

<u>תרגיל</u>

אוטובוס מגיע לתחנה כל 15 דקות.

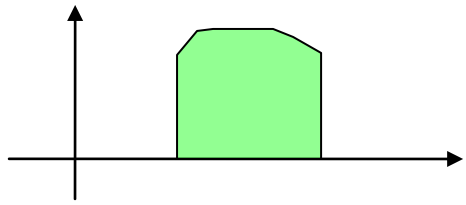
מצא $F_X(t)$ והראה ש-X מ״מ רציף (X – זמן ההמתנה לאוטובוס).

<u>פתרון</u>

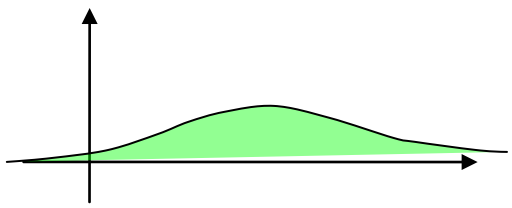
לפי הגדרה: $F_X(t) = P(X \le t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t/15 & 0 \le t < 15 \\ 1, & t \ge 15 \end{cases}$. קיבלנו פונקציה רציפה.

$f_X(t) = F_X{}'(t) = \begin{cases} \frac{1}{15}, & 0 \le t < 15 \\ 0, & t < 0, t > 15 \end{cases}$. $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \Leftarrow$ X מ״מ רציף.

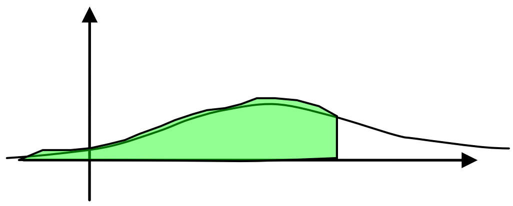
משמעות גיאומטרית של תכונות f(x)



$S_{[a,b]} = P\left(a \underset{....}{<} x \underset{....}{<} b\right)$



$S_{[-\infty,\infty]} = P\left(-\infty < x < \infty\right) = 1$



$S_{[-\infty,t]} = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

דוגמא

נתון: x מ״מ רציף

$$f_X(x) = \begin{cases} a(x+1), & -1 < x < 1 \\ 2a, & 1 \le x < 2 \\ a(x-2), & 2 \le x < 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

a – פרמטר לא ידוע.

א. מצא את a ושרטט גרף של $f_X(x)$.

ב. מצא את $F_X(x)$ ושרטט גרף שלה.

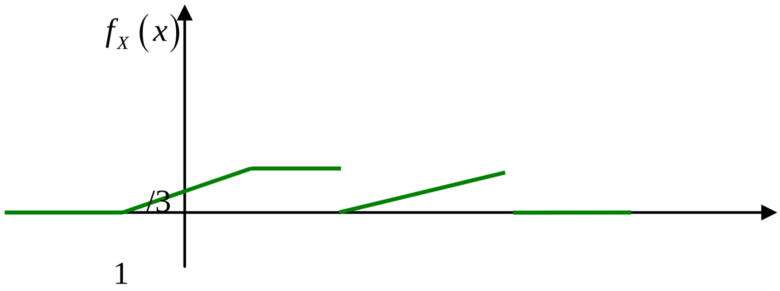
ג. חשב את $p(0 < x < 2.5 \mid x \ge 2)$

פתרון

א.

$$\int_{-1}^{1} a(x+1)\,dx + \int_{1}^{2} 2a\,dx + \int_{2}^{4} a(x-2)\,dx = 1$$

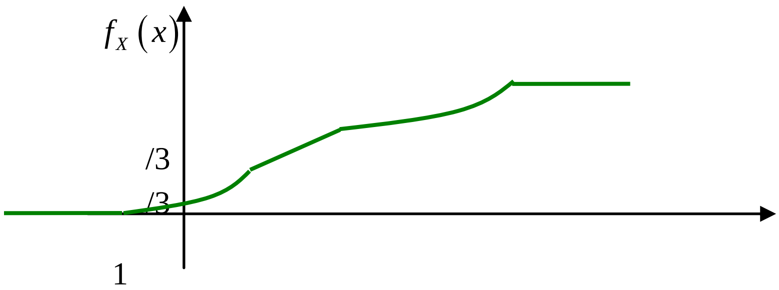
$$2a + 2a + 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{6}$$



$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt = S_{(-\infty,\infty)}$$

ב.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ \frac{1}{12}(x+1)^2, & -1 \le x \le 1 \\ \frac{x}{3}, & 1 \le x \le 2 \\ \frac{2}{3} + \frac{1}{12}(x-2)^2, & 2 \le x \le 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$



ג.

$$p(0 < x < 2.5 \mid x \ge 2) = \frac{p(0 < x < 2.5, x \ge 2)}{p(x \ge 2)} = \frac{p(2 < x < 2.5)}{p(x \ge 2)} =$$

$$= \frac{F_X(2.5) - F_X(2)}{1 - F_X(2)} = \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{48}\right) - \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{16}$$

משתנים מקריים רציפים מיוחדים

משתנה מקרי רציף אחיד

הגדרה

מ"מ רציף נקרא "רציף אחיד", ומסומן $X \sim U(a,b)$ אם פונקצית הצפיפות היא

הפונקציה הנתונה: $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & else\end{cases}$.

פונקצית ההתפלגות תהיה: $F_X(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$

תכונה אופיינית

$p(c<x<d)$ תלוי רק באורך הקטע d-c, ולא במקום שלו על הגרף.

דוגמא

זמן המתנה לאוטובוס; התפלגות המשקל המצומצם, כאשר המשקל נמדד בק"ג שלמים ($X \sim U(0,1)$ בק"ג); מדד המחירים לצרכן הוא בד"כ משתנה מקרי רציף אחיד.

תרגיל

ידוע שמדד המחירים לצרכן מתפלג בצורה אחיד רציפה בין 1- ל-2.

מה ההסתברות שרק באחד מ-3 חודשי הקיץ (יוני, יולי ואוגוסט) המדד יהיה חיובי?

פתרון

נסמן: X – מספר החודשים בעלי מדד חיובי. אז $X \sim B(n=3, p=?)$.

P – ההסתברות שבחודש מסויים המדד הוא חיובי.

נסמן: Y – המדד לצרכן בחודש מסויים. אז $Y \sim U(-1,2)$.

פונקצית ההתפלגות:

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<-1\\ \frac{y+1}{3} & -1\le y\le 2\\ 1, & y>2\end{cases}$$

$$p=p(Y>0)=1-p(y<0)=1-F_Y(0)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

אזי: $X \sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$, ופונקצית ההסתברות של X תהיה:

$$f_X(k)=\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k},k=1,2,3,...$$

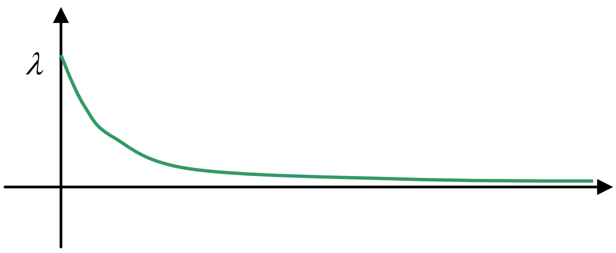
מכאן נקבל:

$$p(X=1)=\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

משתנה מקרי מעריכי

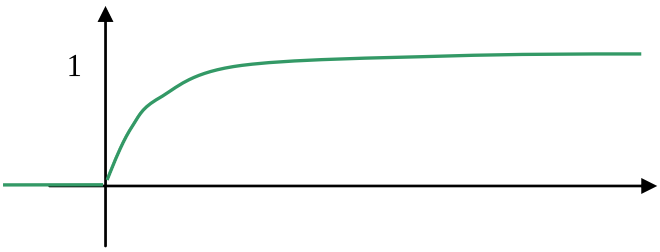
משתנה מקרי רציף נקרא "מעריכי" אם פונקצית הצפיפות שלו נתונה ע"י:

$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\end{cases}$, כאשר $\lambda>0$ פרמטר נתון – ממוצע אירועים בקטע זמן היחידה. ונסמן: $X\sim\exp(\lambda)$



פונקצית ההתפלגות:

$$F_X(x)=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=\lambda\left(\frac{1}{-\lambda}\right)e^{-\lambda t}\Big|_0^x=e^{-\lambda x}+1$$



$$p(X>b)=1-F_X(b)=1-\left(1-e^{-\lambda b}\right)=e^{-\lambda b}$$

תכונות ושימושים של משתנה מקרי מעריכי

משפט 1

בזרם פואסוני, הזמן עד האירוע הראשון, או הזמן בין אירועים צמודים, מתפלג באופן מעריכי.

הוכחה

נגדיר: X – הזמן שעבר עד האירוע הראשון. צ"ל $p(x>t)$.

נגדיר: Y – מספר האירועים בקטע הזמן t. אז מתקיים $Y\sim P(\lambda t)$.

קיבלנו ש- $f_Y(k)=e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^k}{k!}, k=0,1,2,\dots$.

$$p(x>t)=p(Y=0)=e^{-\lambda t}\Rightarrow p(x>t)=e^{-\lambda t}, F_X(t)=p(x\le t)=1-e^{-\lambda t}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f_X(t)=F_X{}'=\lambda e^{-\lambda t}\Rightarrow X\sim\exp(\lambda)$$

דוגמא

אם במכשיר אלקטרוני התקלות מתפלגות פואסונית, אזי הזמן עד התקלה מתפלג בצורה מעריכית.

משפט 2 (תכונת "חוסר הזכרון")

אם $X\sim\exp(\lambda)$, אז $p(X>t+s\mid x>s)=p(x>t)$.

לדוגמא – אם X הוא זמן החיים של מכשיר חשמלי עד תקלה, אזי $p(x>t)$ היא ההסתברות שמכשיר חדש יעבוד לזמן ארוך יותר מ-t, ו-$p(X>t+s\mid x>s)$ היא ההסתברות שמכשיר שכבר עובד זמן s יעבוד זמן ארוך יותר מ-t+s.

התכונה נקראת תכונת "חוסר הזכרון" מכיוון שאינפורמציה על העבר אינה משפיעה על מאורעות העתיד.

דוגמא

אם במכשיר אלקטרוני מתקיימת תכונת "חוסר הזכרון", אז הזמן עד תקלה מתפלג מעריכית.

תרגיל

נתון: ההסתברות שבשעה הראשונה לא יהיו קריאות לטלפון שווה 0.5.

מה ההסתברות שהקריאה הראשונה תהיה בזמן השעה השנייה, אם ידוע שמספר הקריאות מתפלג פואסונית?

פתרון

נסמן: X – הזמן עד הקריאה הראשונה. לפי הנתון $X\sim\exp(\lambda=?)$.

צ"ל $p(1<x<2)$. נתון: $p(x>1)=0.5$.

$$F_X(t)=\begin{cases}0, & t\le 0\\ 1-e^{-\lambda t} & t\ge 0\end{cases}$$

$$p(x>1)=1-p(x\le 1)=1-F_X(1)=1-(1-e^{-\lambda})=e^{-\lambda}$$

$$e^{-\lambda}=0.5\Rightarrow -\lambda=-\ln 2\Rightarrow \lambda=\ln 2$$
$$X\sim\exp(\ln 2)$$

$$p(1<x<2)=F_X(2)-F_X(1)=(1-e^{-2\ln 2})-(1-e^{-\ln 2})=e^{-\ln 2}-e^{-2\ln 2}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

משתנה מקרי גאמה

הגדרה

נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג גאמה, ונסמן: $X \sim Gamma\left(m,\lambda\right)$ אם פונקציית ההסתברות מתוארת ע"י: $f_X\left(x\right)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}\cdot\dfrac{\left(\lambda x\right)^{m-1}}{\left(m-1\right)!}, & x\ge 0\end{cases}$.

פונקצית ההתפלגות: $F_X\left(x\right)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}\cdot\sum\limits_{k=0}^{m-1}\dfrac{\left(\lambda k\right)^k}{k!} & x>0\end{cases}$

משפט

אם נתון זרם פואסוני, אזי הזמן עד האירוע ה-k-י מתפלג גאמה.

<u>תרגיל</u>

זמן הקבלה של חולה אצל רופא המשפחה שווה ל-15 דק' בממוצע. מהי ההסתברות שביום עבודה בן 8 שעות יקבל הרופא לפחות 30 אנשים, אם ידוע שמספר האנשים שהוא מקבל מתפלג פואסונית?

<u>פתרון 1</u>

נסמן: X – זמן השירות עד קבלת חולה מס' 31.

צ"ל $p\left(x<8\right)$.

לפי הנתון: $X \sim Gamma\left(m=31,\lambda=4\right)$. אזי: $F_X\left(x\right)=1-e^{-4x}\sum\limits_{k=0}^{30}\dfrac{\left(4x\right)^k}{k!}$.

ונקבל: $p\left(x<8\right)=F_X\left(8\right)=1-e^{-32}\sum\limits_{k=0}^{30}\dfrac{32^k}{k!}$.

<u>פתרון 2</u>

נסמן: X – מספר האנשים שיקבלו שירות ב-8 שעות. אז $X \sim P\left(\mu=32\right)$.

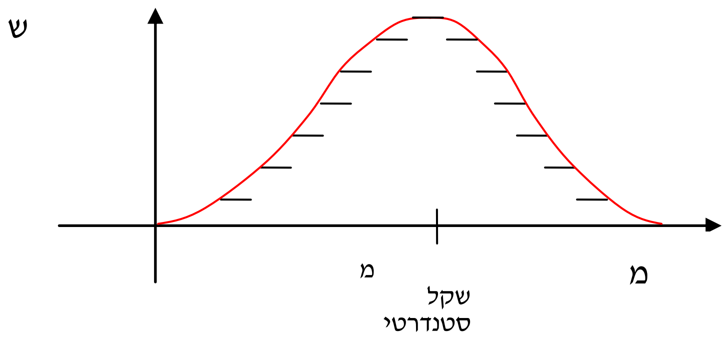
מכאן: $f_X\left(k\right)=e^{-32}\dfrac{32^k}{k!}, k=0,1,2,\ldots$

- $$\begin{aligned}p\left(x>30\right)&=1-p\left(x\le 30\right)=1-p\left(x=0,1,2,\ldots,30\right)=\\&=1-\sum_{k=0}^{30}f_X\left(k\right)=1-\sum_{k=0}^{30}e^{-32}\frac{32^k}{k!}\end{aligned}$$

התפלגות נורמלית

דוגמא

נניח שבודקים מוצאים בייצור מסויים. לכל מוצר יש משקל סטנדרטי, ולפי בדיקה מתקבלות התוצאות הבאות:

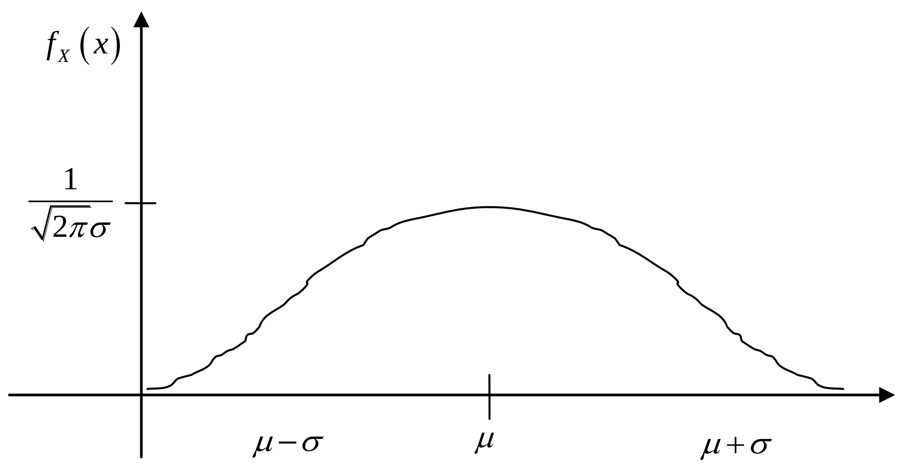


אזי המשקל מתפלג בהתפלגות נורמלית.

הגדרה

נניח שלמשתנה מקרי X קיימת פונ' צפיפות הנראית כך:

$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<\infty$, כאשר $\sigma>0, \mu\in\mathbb{R}$. אזי נאמר שלמ"מ X יש התפלגות נורמלית, ונסמן: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. (μ - ממוצע; σ^2 - שונות)



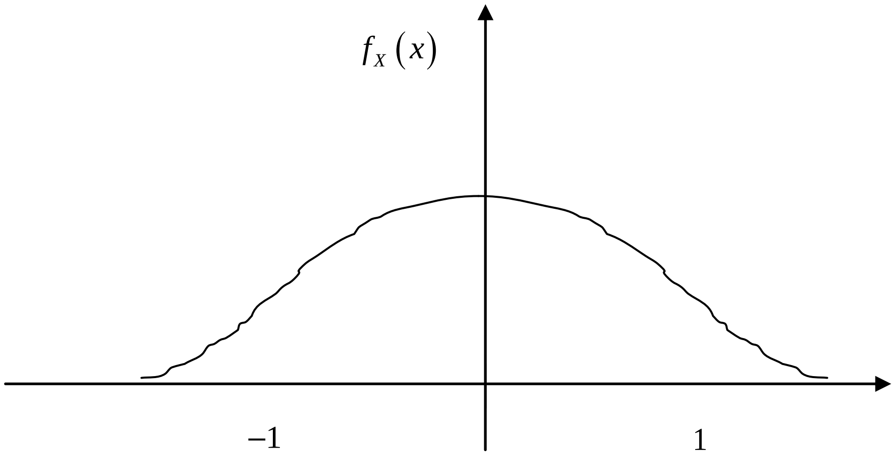
משתנה

מקרי נורמלי סטנדרטי

הגדרה

משתנה מקרי $Z=M\left(\mu=0,\sigma^2=1\right)$ נקרא "משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי".

פונקציית הצפיפות: $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty<x<\infty$.



משפט (הקשר בין מ״מ נורמי כללי למ״מ נורמלי סטנדרטי)

אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ אזי $Z=\frac{x-\mu}{\sigma}\sim N(\mu=0,\sigma^2=1)$.

הוכחה

נסמן: $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$.

אזי: $F_y(x)=p\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\le x\right)=p(X\le \mu+\sigma x)=F_x(\mu+\sigma x)$

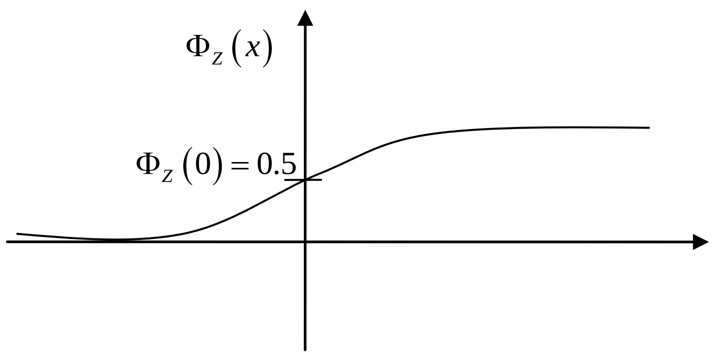
$$\left[F_y(x)\right]_x^1=\left[F_y(\mu+\sigma x)\right]_x^1$$

$$f_y(x)=f_x(\mu+\sigma x)\cdot\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\mu+\sigma x-\mu)}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow y=\frac{X-\mu}{\sigma}=Z$$

פונקצית ההתפלגות של מ"מ Z

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



תכונותיה של $\Phi_Z(x)$

א. $\Phi(0)=0.5$

ב. $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$

ג. אם x<-4 אז $\Phi(x)\approx 0$. אם x>4 אז $\Phi(x)\approx 1$ץ

<u>תרגיל 1</u>

ציון בפסיכומטרי מתפלג נורמלית: $X \sim N(\mu=500, \sigma^2=100^2)$.

ציון הקבלה למקצוע מסוים הוא 600 נק׳.

איזה אחוז מהמועמדים יכול להתחיל את הלימודים במקצוע זה?

<u>פתרון</u>

צ״ל $p(x>600)$:

$$p=1-p(x\le 600)=1-p\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\le\frac{600-\mu}{\sigma}\right)=1-p\left(Z\le\frac{600-500}{100}\right)=$$
$$=1-p(Z\le 1)=1-\Phi(1)=1-0.8413=0.1587$$

מכאן, 15.87% מהמועמדים עומדים בתנאי הקבלה.

<u>תרגיל 2</u>

במקוצע מסויים הציונים מתפלגים עם ממוצע 68, וסטיית תקן 10. פרופסור במקצוע רוצה לקבוע ציון ״עובר״ וציון ״מצויין״ לפי שני פרמטרים:

א. התפלגות בציונים סימטרית לגבי הממוצע.

ב. 80% מהציונים נמצאים בין ״עובר״ ל״מצויין״.

<u>פתרון</u>

הציון מתפלג נורמלית: $X \sim N(\mu=68, \sigma^2=10^2)$, בין ציון ״עובר״ לציון ״מצויין״.

$$p(68-a<68+a)=p\left(\frac{68-a-\mu}{\sigma}<\frac{x-\mu}{\sigma}<\frac{68+a-\mu}{\sigma}\right)$$
$$=p\left(-\frac{a}{10}<Z<\frac{a}{10}\right)=\Phi\left(\frac{a}{10}\right)-\Phi\left(-\frac{a}{10}\right)=2\Phi\left(\frac{a}{10}\right)-1=0.8$$
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{a}{10}\right)=0.9 \Rightarrow a=12.8$$

מכאן:

ציון ״עובר״ - $68-12.8=55.2$

ציון ״מצויין״: $68+12.8=80.8$

משתנה מקרי מעורב

הגדרה

מ"מ $X:\Omega\to\mathbb{R}$ נקרא "מעורב" אם הוא לא בדיד ולא רציף.

הגדרה 2

אם למשתנה מקרי, קבוצת הערכים האפשריים היא קטע מסויים, ובקטע הזה קיימת לפחות נקודה אחת c כך ש- $p(X=c)\neq 0$, אזי X נקרא "משתנה מקרי מעורב."

במקרה זה, נק' c נקראת "אטום" של מ"מ X.

משפט

אם X מ"מ מעורב, ו-c אטום של X, אזי $p(X=c)=F_X(c)-F_X(c^-)$.

הוכחה

לכל מ"מ $p(a<X\le c)=F_X(c)-F_X(a)$.

נניח: $a\to c \Leftarrow p(X=c)=F_X(c)-F_X(c^-)$.

תרגיל 1

ברמזור יש אור ירוק במשך 3 דקות ואור אדום במשך 2 דקות.

נסמן: X – זמן ההמתנה ברמזור.

מצא את פוני' ההתפלגות של X.

פתרון

$0\le X\le 2$. עבור אור אדום: $X\sim U(0,2)$ מכאן:

$$F_X(x)=p(X\le x)=p(green)\,p(X\le x\mid green)+p(red)\cdot p(X\le x\mid red)=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot 1+\frac{2}{5}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x+3}{5}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x+3}{5} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

קיימת קפיצה בנק' 0. מכאן – X מ"מ מעורב, ו- $p(X=0)=F_X(0)F_X(0^-)=\frac{3}{5}$.

תרגיל 2

במכשיר יש סוללה בעלת זמן חיים המתפלג מעריכית עם פרמטר λ.

את המכשיר מכבים אחרי שעה לכל היותר.

נסמן: X – זמן העבודה של המכשיר. מצא $F_X(x)$.

פתרון

$0 \le x \le 1$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

יש קפיצה בנק' 1, מכאן X מ"מ מעורב. אזי:

$p(X=1) = F_X(1) - F_X(1^-) = 1-(1-e^{-\lambda}) = e^{-\lambda}$.

מקסימום ומינימום של משתנים מקריים

משפט

נתון: $x_1, x_2, ..., x_n$ מ״מ ב״ת מעל אותו מרחב מדגם Ω.

אז מתקיים:

$$F_{\max\{x_1,x_2,...,x_n\}}(x) = F_{x_1}(x)\cdot F_{x_2}(x)\cdot ...\cdot F_{x_n}(x)$$
$$F_{\min\{x_1,x_2,...,x_n\}}(x) = 1-(1-F_{x_1}(x))\cdot(1-F_{x_2}(x))\cdot ...\cdot(1-F_{x_n}(x)).$$

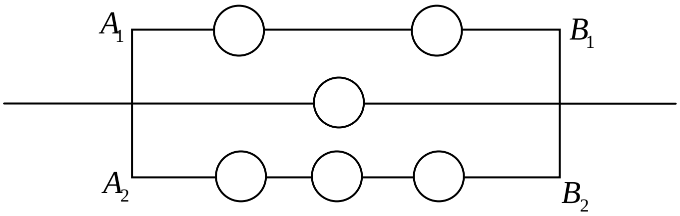
הוכחה

$$\begin{aligned}
&F_{\max\{x_1,x_2,...,x_n\}}(x) = p(\max\{x_1,x_2,...,x_n\}\le x) = \\
&= p(x_1\le x, x_2\le x, ..., x_n\le x) = p(x_1\le x)\cdot p(x_2\le x)\cdot ...\cdot p(x_n\le x) = \\
&= F_{x_1}(x)\cdot F_{x_2}(x)\cdot ...\cdot F_{x_n}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_{\min\{x_1,x_2,...,x_n\}}(x) = p(\min\{x_1,x_2,...,x_n\}\le x) = 1-p(\min\{x_1,x_2,...,x_n\}> x) \\
&= 1-p(x_1> x, x_2> x, ..., x_n> x) = 1-p(x_1> x)\cdot p(x_2> x)\cdot ...\cdot p(x_n> x) = \\
&= 1-(1-p(x_1\le x))\cdot(1-p(x_2\le x))\cdot ...\cdot(1-p(x_n\le x)) = \\
&= 1-(1-F_{x_1}(x))\cdot(1-F_{x_2}(x))\cdot ...\cdot(1-F_{x_n}(x))
\end{aligned}$$

תרגיל

נתונה מערכת אלקטרונית ע״י הציור הבא:



$$x_k \sim \exp(\lambda_k), k=1,2,3,...$$

פתרון

X_{AB} - זמן החיים של המערכת. צ״ל $F_{X_{AB}}(t)$.

$$\begin{aligned}
&X_{AB} = \max\{X_{A_1B_1}, X_3, X_{A_2B_2}\} = \max\{\min\{X_1,X_2\}, X_3, \min\{X_4,X_5,X_6\}\} = \\
&= F_{X_{AB}}(t) = F_{\min\{X_1,X_2\}}(t)\cdot F_{X_3}(t)\cdot F_{\min\{X_4,X_5,X_6\}}(t) = \\
&= \left[1-(1-F_{X_1}(t))(1-F_{X_2}(t))\right]F_{X_3}(t)\left[1-(1-F_{X_4}(t))(1-F_{X_5}(t))(1-F_{X_6}(t))\right]
\end{aligned}$$

$$F_{X_k}(t) = \begin{cases} 1-e^{-\lambda_k t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

$$t<0 \Rightarrow F_{X_{AB}}(t)=0$$
$$t \ge 0 \Rightarrow F_{X_{AB}}(t)=\left(1-e^{(-\lambda_1+\lambda_2)t}\right)\left(1-e^{(-\lambda_3)t}\right)\left(1-e^{(-\lambda_4+\lambda_5+\lambda_6)t}\right)$$

<u>המשך תרגיל</u>

נניח : $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_6 = 1$. מצא את $p\left(X_3>1 | X_{AB} \le 2\right)$.

<u>פתרון</u>

$$p=\frac{p\left(X_3>1 \cap X_{AB} \le 2\right)}{p\left(X_{AB} \le 2\right)}=\frac{p\left(X_3>1 \cap X_{A_1B_1} \le 2, X_3 \le 2, X_{A_2B_2} \le 2\right)}{p\left(X_{AB} \le 2\right)}=$$
$$=\frac{p\left(1<X_3 \le 2, X_{A_1B_1} \le 2, X_{A_2B_2} \le 2\right)}{p\left(X_{AB} \le 2\right)}=\frac{p\left(1<X_3 \le 2\right)\cdot p\left(X_{A_1B_1} \le 2\right)\cdot p\left(X_{A_2B_2} \le 2\right)}{p\left(X_{AB} \le 2\right)}=$$
$$=\frac{\left(F_{X_3}(2)-F_{X_3}(1)\right)\left(F_{X_{A_1B_1}}(2)\right)F_{X_{A_2B_2}}(2)}{F_{X_{AB}}(2)}=\frac{\left(\left(1-e^{-2}\right)-\left(1-e^{-1}\right)\right)\left(1-e^{-4}\right)\left(1-e^{-6}\right)}{\left(1-e^{-2}\right)\left(1-e^{-4}\right)\left(1-e^{-6}\right)}=$$
$$=\frac{\left(1-e^{-2}\right)-\left(1-e^{-1}\right)}{\left(1-e^{-2}\right)}=\frac{1}{e+1}$$

טרנספורמציה

הגדרה

נניח ש-X מ"מ, ו-$y = g(x)$. פונקציה ממשית.

אזי מ"מ $Y = g(X)$ נקרא "טרנספורמציה של מ"מ X ע"י פונקציה $y = g(x)$.

טרנספורמציה מרציף לבדיד:

נתון: $y = sign(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

נסמן: $y = g(x)$. אזי $X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$. $y_1 = g(x_1)$

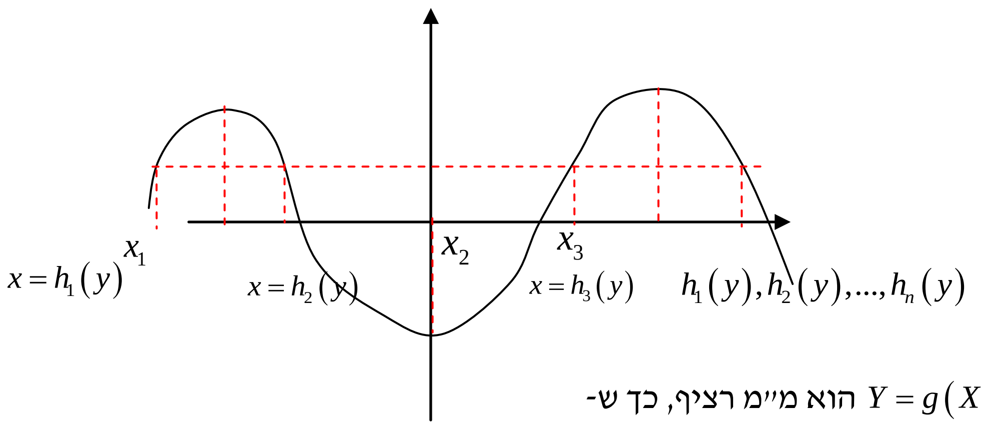
Y_1	1		
$F_{Y_1}(y)$	/2		/2

$$p(Y_1 = -1) = p(g(X_1) = -1) = p(X_1 < 0) = \frac{1}{2}$$

טרנספורמציה ממ"מ רציף למ"מ רציף

משפט

נניח ש-X מ"מ רציף, ו-$y = g(x)$. פונקציה רציפה והפיכה בקטעים:



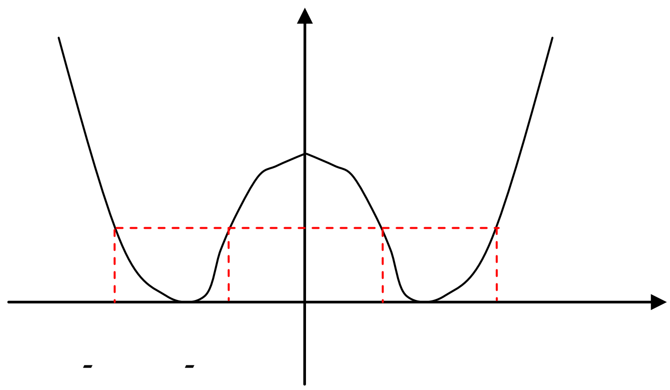
אז $Y = g(X)$ הוא מ"מ רציף, כך ש-

$$f_Y(y) = f_X(h_1(y)) \cdot |h_1'(y)| + f_X(h_2(y)) \cdot |h_2'(y)| + f_X(h_3(y)) \cdot |h_3'(y)| + \ldots + f_X(h_n(y)) \cdot |h_n'(y)|$$

כאשר $h_1(y), h_2(y), \ldots, h_n(y)$ הם פתרונות (פונקציות הפוכות) של המשוואה $g(x) = y$ לגבי x.

<u>דוגמא</u>

נתון $X \sim U(-2,2)$, $g(x) = (x^2 - 1)^2$. מצא $f_Y(y)$ כאשר $Y = g(X)$.



נניח $0 < y < 1$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & else \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -2 < x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$f_Y(y) = f_X(h_1(x))|h_1'(x)| + f_X(h_2(x))|h_2'(x)| + f_X(h_3(x))|h_3'(x)| + f_X(h_4(x))|h_4'(x)|$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}|h_1'(y)| + \frac{1}{4}|h_2'(y)| + \frac{1}{4}|h_3'(y)| + \frac{1}{4}|h_4'(y)|$$

$$(x^2-1)^2 = y \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow h_1(y) = -\sqrt{1+\sqrt{y}}; h_2(y) = -\sqrt{1-\sqrt{y}}; h_3(y) = \sqrt{1+\sqrt{y}}; h_4(y) = \sqrt{1-\sqrt{y}}$$

$$|h_1'(y)| = |h_4'(y)| = \frac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{y}}\sqrt{y}}; |h_2'(y)| = |h_3'(y)| = \frac{1}{4\sqrt{1-\sqrt{y}}\sqrt{y}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{4}\left(2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{1+\sqrt{y}}\sqrt{y}} + 2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{1-\sqrt{y}}\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{y}}\sqrt{y}} + \frac{1}{8\sqrt{1-\sqrt{y}}\sqrt{y}}$$

כעת, נניח $1 < y < 9$:

נשארנו עם השורשים הקיצוניים : $f_Y(y) = \dfrac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{y}}\sqrt{y}}$.

$$f_Y\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{y}}\sqrt{y}}+\dfrac{1}{8\sqrt{1-\sqrt{y}}\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ f_Y\left(y\right)=\dfrac{1}{8\sqrt{1+\sqrt{y}}\sqrt{y}} & 1<y<9\\ 0, & else\end{cases}$$

מכאן :

השיטה האוניברסלית למציאת פונקציות התפלגות של Y כאשר Y רציף או מעורב

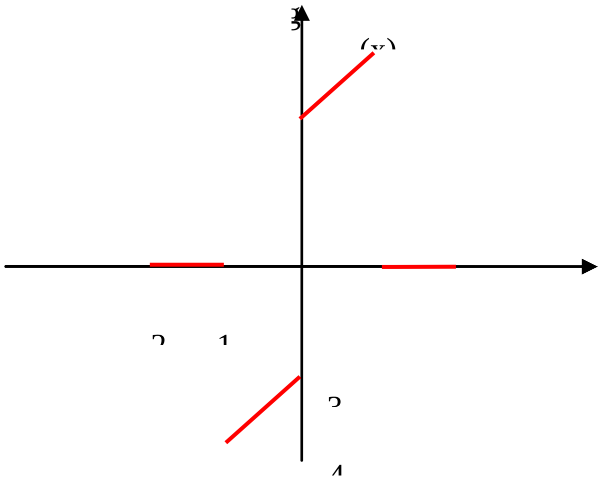
<u>תרגיל</u>

נתון: $X \sim U(-2,2)$.

$$g(x)=\begin{cases} x-3, & -1<x<0 \\ x+3, & 0<x<1 \\ 0, & else \end{cases}$$

מצא $F_Y(y)$ כאשר $Y=g(X)$.

<u>פתרון</u>



מהציור ניתן לראות: $p(Y=0)\neq 0$, ו- $F_Y(y)$ לא רציפה רק בנקודה y=0.

נניח $-4\le y<-3$:

$$F_Y(y)=p(Y\le y)=p(-4\le Y\le y)=p(-4\le X-3\le y)$$
$$=p(-1\le X\le y+3)=F_X(y+3)-F_X(-1)$$

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ 1, & x>b \end{cases}=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x-2}{4}, & -2\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_Y(y)=F_X(y+3)-F_X(-1)=\frac{y+5}{4}-\frac{1}{4}=\frac{y+4}{4}$$

כעת נניח $-3\le y<0$:

$$F_Y(y) = p(Y \le y) = F\left(-3^-\right) + \underbrace{p(Y=-3)}_{=0} + \underbrace{p(-3 \le Y < y)}_{-0} =$$

$$= \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4}$$

נניח $0 \le y < 3$:

$$F_Y(y) = p(Y \le y) = F\left(0^-\right) + p(Y=0) + \underbrace{p(0 \le Y < y)}_{-0} =$$

$$= \frac{1}{4} + p(-2 < X < -1) + p(1 < Y < 2) = \frac{1}{4} + F_X(-1) - F_X(-2) + F_X(2) - F_X(1) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 + 1 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

נניח $3 \le y < 4$:

$$F_Y(y) = p(Y \le y) = F\left(3^-\right) + \underbrace{p(Y=3)}_{=0} + p(3 < Y \le y) =$$

$$= \frac{3}{4} + p(3 < X + 3 < y) = \frac{3}{4} + p(0 < X < y-3) = \frac{3}{4} + F_X(y-3) - F_X(0) =$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{y-1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{y}{4}$$

לכן :

$$F_y(y) = \begin{cases} 0, & y < -4 \\ \frac{y+4}{4}, & -4 \le y < -3 \\ \frac{1}{4}, & -3 \le y < 0 \\ \frac{3}{4} & 0 \le y < 3 \\ \frac{y}{4} & 3 \le y < 4 \\ 1, & 4 \le y \end{cases}$$

תוחלת של משתנה מקרי

משמעות הסתברותית

ממוצע משוקלל של משתנה מקרי.

<u>דוגמא</u>

צי ון						
ש כיחות			0			

$$\overline{X}=\frac{1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 10+4\cdot 3+5\cdot 2+6\cdot 1}{25}$$

נסמן X :

	צי ון						
$f_X(x)$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{10}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	

ממוצע הסתברותי:

$$EX=1\cdot\frac{4}{24}+2\cdot\frac{5}{25}+3\cdot\frac{10}{25}+4\cdot\frac{3}{25}+5\cdot\frac{2}{25}+6\cdot\frac{1}{25}$$

נוסחאות ל-EX:

א. אם X מ"מ בדיד אז $EX=\sum_{k=1}^{n}X_k\cdot f_X\left(x_k\right)$.

ב. אם X מ"מ רציף אז: $EX=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X\left(x\right)dx$

ג. אם X מ"מ רציף או מעורב אז: $EX=-\int_{-\infty}^{0}F_X\left(x\right)dx+\int_{0}^{\infty}\left[1-F_X\left(x\right)\right]dx$

<u>תרגיל</u>

ברמזור יש אור ירוק במשך 3 דקות, ואור אדום במשך 2 דקות. מהו הזמן הממוצע להמתנה ברמזור?

<u>**פתרון**</u>

נסמן: t – זמן ההמתנה ברמזור.

צ"ל EX.

$$F_X(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{t+3}{5}, & 0\le t<2\\ 1, & t\ge 2\end{cases}$$

T מ״מ מעורב, לכן:

$$EX=\int_0^\infty\left[1-F_X(t)\right]dt=\int_0^2\left[1-\frac{t+3}{5}\right]dt+\int_2^\infty\left[1-1\right]dt=$$

$$=t-\frac{(t+3)^2}{10}\Bigg|_0^2=(2-2.5)-(0-0.9)=-0.5+0.9=0.4$$

תכונות של EX

א. $EC=C$

ב. $E(A\cdot X)=A\cdot EX$ (הוכחה ע"י טרנספורמציה)

ג. $E(X\pm Y)=EX\pm EY$ (הוכחה ע"י מ"מ דו-מימדי)

ד. אם X ו-Y מ"מ ב"ת, אז: $E(X\cdot Y)=EX\cdot EY$

הוכחה (ב)

$$E(AX)=\int_{-\infty}^{\infty}Ax\cdot f_X(x)dx=A\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx=A\cdot EX$$

תוחלת של טרנספורמציה

משפט

נניח $Y=g(X)$ טרנספורמציה של מ"מ. אז:

א. $E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty}g(X_k)f_X(X_k)$ כאשר X מ"מ בדיד.

ב. $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(X)f_X(X)dx$ כאשר X מ"מ רציף.

הוכחה (ב)

$y=g(x)$ מונוטונית עולה.

$$Y=g(X)\Rightarrow EY=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_Y dy=\int_{-\infty}^{\infty}y\cdot f_X\left(g^{-1}(y)\right)\cdot\left[g^{-1}(y)\right]'dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\cdot f_X(x)dx$$

תוצאות

א. אם X מ"מ בדיד אז: $E(X^m)=\sum_{i=1}^{\infty}x_i^m f_X(x_i)$.

ב. אם X מ"מ רציף אז: $E(X^m)=\int_{-\infty}^{\infty}x^m f_X(x)dx$

תרגיל

במכשיר יש סוללה בעלת זמן עבודה המתפלג מעריכית: $X \sim Exp(\lambda)$.

בשעה הראשונה, המכשיר מחובר לחשמל.

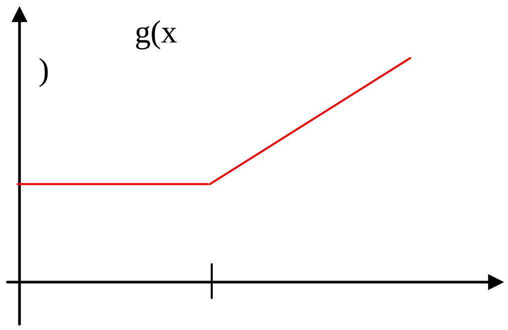
נסמן: Y – זמן העבודה של המכשיר עד תקלה.

צ"ל EY.

פתרון

$Y = \max\{1, X\}$

$g(x) = \max\{1, x\}$



$$EY = E\left[g(X)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx = \int_{0}^{\infty} g(x)\lambda e^{-\lambda x}dx =$$

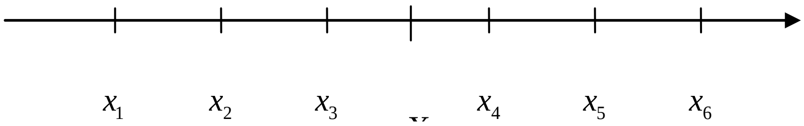
$$= \int_0^1 1\cdot \lambda e^{-\lambda x}dx + \int_1^{\infty} X\cdot \lambda e^{-\lambda x}dx = -e^{-\lambda x}\Big|_0^1 + \left(-X\cdot e^{-\lambda x}\Big|_1^{\infty} + \int_1^{\infty} e^{-\lambda x}dx\right) =$$

$$= -e^{-\lambda x}\Big|_0^1 + \left(-X\cdot e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Bigg|_1^{\infty}\right) = -\left(e^{-\lambda} - 1\right) + e^{-\lambda} + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda} =$$

$$= 1 + \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}$$

שונות וסטיית תקן של מ"מ

נניח: X – מ״מ בדיד.



$|x-EX|$ - מרחק ממספר x עד לממוצע – EX.

ממוצע המרחקים: $E|x-EX|$. זהו אפיון של פיזור.

אבל, זהו אפיון לא נח, מכיוון שלעתים קרובות קשה למצוא ערך מוחלט של פונקציה.

לכן משתמשים באפיון אחר:

$|a|=\sqrt{a^2}$, לכן ניתן לסמן $\sigma_X=\sqrt{E\left(X-EX\right)^2}$, כאשר σ_X נקרא ״סטיית התקן של מ״מ X״.

כמו-כן: $\operatorname{var}\left(X\right)=\sigma_X{}^2=E\left(X-EX\right)^2$ - ״שונות של X״.

נוסחאות לחישוב

א. $\operatorname{var}\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E\left(X\right)^2$

ב. $\operatorname{var}\left(X\right)=\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2 f_X\left(x_i\right)-E\left(X\right)^2$ (X בדיד)

$\operatorname{var}\left(X\right)=\int_{-\infty}^{\infty}X_i^2 f_X\left(x_i\right)dx-E\left(X\right)^2$ (X רציף)

ג. $\operatorname{var}\left(X\right)=-2\int_{-\infty}^{0}xF_X\left(x\right)dx+2\int_{0}^{\infty}x\left[1-F_X\left(x\right)\right]dx-E\left(X\right)^2$ (X רציף או מעורב)

תכונות של Var(X)

א. $\mathrm{var}(C)=0$

ב. $\mathrm{var}(A\cdot X)=A^2\,\mathrm{var}(X)$

ג. אם X ו-Y ב"ת, אז: $\mathrm{var}(X\pm Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$

ד. $\mathrm{var}(X)\ge 0$

ה. $\mathrm{var}(X+C)=\mathrm{var}(X)$

הוכחה (ג)

$$\mathrm{var}(X+Y)=E\left(X+Y-E(X+Y)\right)^2=E\left[(X-EX)+(Y-EY)\right]^2=$$
$$=E\left[(X-EX)^2+2(X-EX)\cdot(Y-EY)+(Y-EY)^2\right]=$$
$$=\mathrm{var}(X)+2E(X-EX)\cdot E(Y-EY)+\mathrm{var}(Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$$

תוחלת ושונות של מ"מ מיוחדים

X	E(X)	Var(X)	שיטת הוכחה
$U(1,\dots,N)$	$\frac{1+N}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	א
$B(n,p)$	$n\cdot p$	$n\cdot p(1-p)$	ב
$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	א
$P(\mu)$	μ	μ	ג
$NB(m,p)$	$\frac{m}{p}$	$\frac{(1-p)m}{p^2}$	ב
$H(A,B,n)$	$\frac{nA}{A+B}$	ל קיימת	ב

X	E(X)	Var(X)	שיטת הוכחה
$U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	א
$\exp(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	א
$Gamma(m,\lambda)$	$\frac{m}{\lambda}$	$\frac{m}{\lambda^2}$	ב
$N(\mu,\sigma^2)$	μ $\frac{x-\mu}{\sigma}$	σ^2	ג

ישנן 3 דרכים להוכחה:

א. חישוב לפי נוסחה.

ב. לפי פירוק של מ"מ X לסכום של מ"מ פשוטים.

ג. לפי התכונות: $\sum_{i=1}^{\infty} f_X(x_i)=1, \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$

הוכחה

א. אם $X\sim U(1,\ldots,N)$ אז: $EX=\frac{1+N}{2}$.

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty} x_i f_X(x_i)=\frac{1}{N}(1+2+\ldots+N)=\frac{1}{N}\cdot\frac{1+N}{2}\cdot N=\frac{1+N}{2}$$

ב. אם $X\sim B(n,p)$ אז $EX=n\cdot p$.

$EX=\sum_{i=1}^{n} x_i f_X(x_i)=\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$. דרך זו לא תתאים במקרה זה.כ

$x_i=\begin{cases}1, & "i"-success\\ 0, & else\end{cases}$. אזי $X=x_1+x_2+\ldots+x_n$.

מכאן: $Ex_i=0(1-p)+1\cdot p=p$. לכן:

$$EX=Ex_1+Ex_2+\ldots+Ex_n=\underbrace{p+p+\ldots+p}_{n}=n\cdot p$$

ג. אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ אז $EX=\mu$.

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu+\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

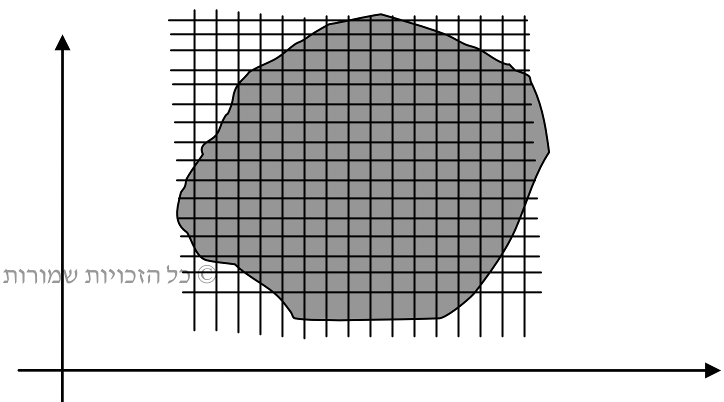
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx+\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt}_{=0}+\mu\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx}_{=1}=\mu$$

הגדרה וחישוב של אינטגרל כפול

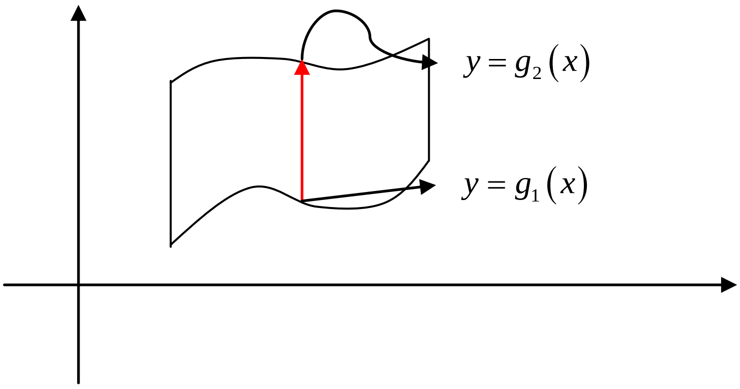
הגדרה

נתון: $z=f(x,y)$ פונקציה רציפה בתחום הסגור D של המישור:

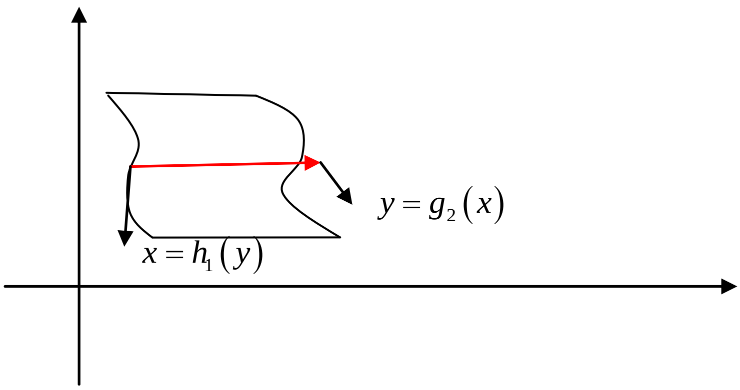


גבול הסכום $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f\left(x_i, y_j\right)\Delta x_i \Delta y_j$, כאשר $\Delta x_i, \Delta y_j \to 0$ נקרא "אינטגרל כפול בתחום D", ונסמן $\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy$.

<u>ישנם שני מקרים יסודיים:</u>



$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f\left(x,y\right)dy$$



$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{h_1(y)}^{h_2(y)} f\left(x,y\right)dx$$

משתנה מקרי דו-מימדי

משתנה מקרי דו-מימדי בדיד

הגדרה

נניח ש-X ו-Y מ"מ מעל אותו מרחב הסתברות.

אזי הזוג (X,Y) נקרא "משתנה מקרי דו-מימדי".

אם X ו-Y מ"מ בדידים, אזי (X,Y) נקרא "משתנה מקרי דו מימדי בדיד".

הגדרה

נניח ש-(x_i,y_j) ערכים אפשריים של מ"מ דו-מימדי (X,Y). אז הפונ' $f_{X,Y}(x_i,y_j)=p(X=x_i,Y=y_j)$ נקראת "פונקצית ההסתברות של (X,Y).

תכונות

א. $\sum_{i=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j)=f_Y(y_j);\sum_{j=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j)=f_X(x_i)$

ב. $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j)=1$

הוכחה (א')

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_{X,Y}(x_i,y_j)=\sum_{i=1}^{\infty} p(X=x_i,Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty} p(X=x_i)\cdot p(Y=y_j\mid X=x_i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty} p(B_i)\cdot p(A\mid B_i)=p(Y=y_j)=f_Y(y_j)$$

הגדרה

אם נתון (X,Y) משתנה מקרי דו-מימדי, אזי מ"מ X ו-Y נקראים "משתנים שוליים".

Y / X	y_1	..	y_m	$f_X(x_i)$
x_1	$f_{X,Y}(x_1,y_1)$	..	$f_{X,Y}(x_1,y_m)$	$f_X(x_1)$
..	...	..	...	..
x_n	$f_{X,Y}(x_n,y_1)$	..	$f_{X,Y}(x_n,y_m)$	$f_X(x_n)$
..	...		...	.

.		..		..	..
$f_Y\left(y_j\right)$	$f_Y\left(y_1\right)$	..	$f_Y\left(y_m\right)$	$\sum$ ..	$=1$

<u>תרגיל</u>

בכד יש כרטיסים הממוספרים מ-1 עד 5.

X – המקסימום מהמספרים שנבחרו.

Y – המינימום מהמספרים שנבחרו.

א. מצא את $f_{X,Y}\left(x_i, y_j\right)$.

ב. מצא התפלגות של $Z = X - Y$.

ג. מצא את ההסתברות $p\left(X > 2Y \mid Y \leq 2\right)$.

<u>פתרון</u>

א. $p\left(X = i, Y = j\right) = \frac{\left|X = i, Y = j\right|}{\left|\Omega\right|} = \frac{1}{\binom{5}{2}} = 0.1$

Y \ X					)
2	.1				0 .1
3	.1	.1			0 .2
4	.1	.1	.1		0 .3
5	.1	.1	.1	.1	0 .4
$f_Y\left(y_j\right)$	.4	.3	.2	.1	1

ב.

$f_Z(1) = p(X - Y = 1) = p(X = 2, Y = 1) + p(X = 3, Y = 2) + p(X = 4, Y = 3) + p(X = 4, Y = 4) =$
$= 4 \cdot 0.1 = 0.4$
$f_Z(2) = p(X = 3, Y = 1) + p(X = 4, Y = 2) + p(X = 5, Y = 3) = 0.3$
$f_Z(3) = p(X = 4, Y = 1) + p(X = 5, Y = 2) = 0.2$
$f_Z(4) = p(X = 4, Y = 1) = 0.1$

	Z=X-Y					)
$f_Z(z_k)$		.4	.3	.2	.1	1

ג.

$$p(X > 2Y \mid Y \le 2) = \frac{p(X > 2Y, Y \le 2)}{p(Y \le 2)} = \frac{p(X = 3, Y = 1) + p(X = 4, Y = 1) + p(X = 5, Y = 1) + p(X = 5, Y = 2)}{p(Y = 1) + p(Y = 2)} =$$
$$= \frac{0.4}{0.4 + 0.3} = \frac{4}{7}$$

משתנה מקרי דו-מימדי רציף

פונקצית התפלגות משותפת

<u>הגדרה</u>

הפונ' $F_{X,Y}(x,y) = p(X \le x, Y \le y)$ נקראת "פונקצית התפלגות משותפת של מ"מ (X,Y).

תכונות

א. $0 \le F_{X,Y} \le 1$

ב. $F_{X,Y}(-\infty, y) = F_{X,Y}(x, -\infty) = 0$

ג. $F_{X,Y}(\infty, \infty) = 1$

ד. $F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y); F_{X,Y}(x, \infty) = F_X(x)$

<u>הגדרה</u>

נניח שקיימת פונ' $f_{X,Y}(x,y) \ge 0$ כך ש- $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t,s)\,dtds$.

אזי מ"מ (X,Y) נקרא "משתנה מקרי דו-מימדי רציף", והפונ' $f_{X,Y}(x,y)$ נקראת "פונ' צפיפות משותפת".

תכונות

א. $f_{X,Y}(x,y) \ge 0$

ב. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy = 1$

ג. $f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{dxdy}$

ד. $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy;\ f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

ה. לכל תחום D במישור מתקיים : $p((X,Y)\in D)=\iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy$.

הוכחה (ד)

$$f_X(x)=F_{X,Y}(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,s)dtds$$

$$f_X(x)=F_X{}'(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(t,s)ds\right)dt=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,s)ds$$

תרגיל

מ״מ דו-מימדי רציף נתון ע״י : $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c, & |x|\le 1, 0\le y\le 1, x+y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$

א. מצא את C.

ב. מצא את $f_Y(y), f_X(x)$.

ג. מצא את $p(X+Y>0\,|\,Y\ge 0.5)$.

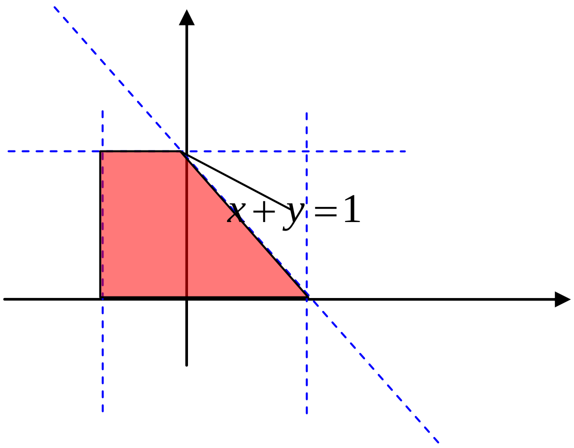
ד. מצא את $f_X(x\,|\,y\le 0.5)$

פתרון

א.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}dxdy=1\Rightarrow \iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy=1$$

$$C\iint_D dxdy=1\Rightarrow C\cdot S_D=1, C\cdot\frac{2}{3}=1\Rightarrow C=\frac{2}{3}$$



ב. עבור $-1<x<0$: $f_X(x)=\int_0^1 \frac{2}{3}dy=\frac{2}{3}y\Big|_0^1=\frac{2}{3}$

עבור $0<x<1$: $f_X(x)=\int_0^{1-x}\frac{2}{3}dy=\frac{2}{3}y\Big|_0^{1-x}=\frac{2}{3}(1-x)$

מכאן: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy=\begin{cases}\frac{2}{3}, & -1<x<0\\ \frac{2}{3}(1-x), & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$

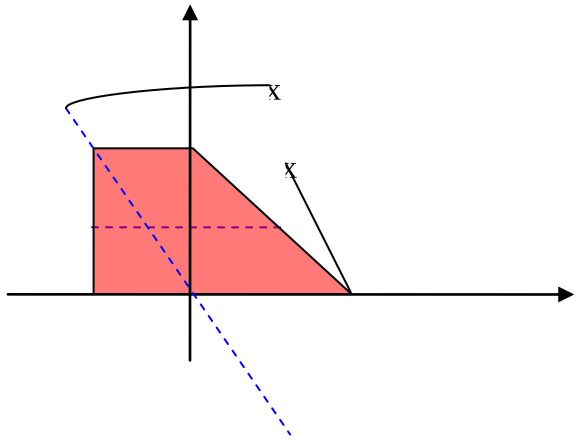
עבור $0<y<1$: $f_Y(y)=\int_{-1}^{1-y}\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}x\Big|_0^{1-y}=\frac{2}{3}(1-y+1)=\frac{2}{3}(2-y)$.

מכאן: $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\begin{cases}\frac{2}{3}(2-y), & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$.

ג. $p(X+Y>0\,|\,Y\geq 0.5)=\dfrac{p(X+Y>0,Y\geq 0.5)}{p(y\geq 0.5)}$

$$p\left(\underbrace{X+Y>0\,|\,Y\geq 0.5}_{D_1}\right)=\iint_{D_1\cap D_2} f_{X,Y}(x,y)dxdy=\frac{2}{3}\iint_{D_1\cap D_2} dxdy=$$

$$=\frac{2}{3}\int_{0.5}^{1}dy\int_{-y}^{1-y}dx=\frac{2}{3}\int_{0.5}^{1}\left(x\Big|_{-y}^{1-y}\right)dy=\frac{2}{3}\int_{0.5}^{1}(1-y+y)dy=\frac{2}{3}y\Big|_{0.5}^{1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$



$$p(Y \ge 0.5) = \int_a^b f_Y(y)dy = \frac{2}{3}\int_{0.5}^{1}(2-y)dy = \frac{2}{3}\left(2y - \frac{y^2}{2}\right)_{0.5}^{1} =$$

$$= \left(\frac{4}{3}y - \frac{y^2}{3}\right)_{0.5}^{1} = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

ד. $f_X(x \mid y \le 0.5) = p(X \le x \mid Y \le 0.5) = \dfrac{p(X \le x, Y \le 0.5)}{\underbrace{p(y \le 0.5)}_{=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}}}$.

עבור $-1 < x < 0.5$: $p(X \le x, Y \le 0.5) = \iint_{D \cap D_2} \frac{2}{3}dxdy = \frac{2}{3}S_{D \cap D_2} = \frac{1}{3}(X+1)$.

עבור $0.5 < X < 1$:

$$p(X \le x, Y \le 0.5) = \iint_{D \cap D_2} \frac{2}{3}dxdy = \frac{2}{3}S_{D \cap D_2} = \frac{2}{3}\left[(0.5+1)\cdot 0.5 + \frac{0.5+1-X}{2}\cdot(X-0.5)\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{4} + \frac{3-2X}{4}(X-0.5)\right] = 0.5 + \frac{(3-2X)(X-0.5)}{6}$$

מכאן : $p(X \le x, Y \le 0.5) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x+1), & -1 < X < 0.5 \\ 0.5 + \frac{(3-2X)(X-0.5)}{6}, & 0.5 < X < 1 \\ 0, & else \end{cases}$.

טרנספורמציה של משתנה מקרי דו-מימדי

הגדרה

נתון: מ"מ דו-מימדי (X,Y) ופונ' ממשית $z=g(X,Y)$.

אז המשתנה $Z=g(X,Y)$ נקרא "טרנספורמציה של מ"מ (X,Y)".

דוגמא

$$Z=X\pm Y; Z=X\cdot Y; Z=X^2+Y^2$$

פונ' התפלגות של טרנספורמציה

משפט

נניח שמ"מ דו-מימדי (X,Y) נתון ע"י פונ' צפיפות $f_{X,Y}(x,y)$.

נסמן לכל מספר ממשי z תחום $D_z=\{(x,y):g(x,y)\le z\}$.

אז $F_Z(z)=\iint\limits_{D_z} f_{X,Y}(x,y)dxdy$.

הוכחה

$$z=g(X,Y)$$

$$F_Z(z)=p(g(X,Y)\le Z)=p((X,Y)\in D_Z)=\iint\limits_{D_Z} f_{X,Y}(x,y)dydz$$

תוחלת של טרנספורמציה

$$t=g(X,Y)$$

אם X מ"מ חד-מימדי, ו- $Y=g(X)$, אז:

$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)f_X(x_i)$ (X בדיד)

$E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty} g(x_i)f_X(x_i)dx$ (X רציף)

אם נתונה טרנספורמציה $Z=g(X,Y)$ אז:

א. אם (X,Y) מ"מ בדיד, אז: $E(Z)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} g(x_i,y_j)f_{X,Y}(x_i,y_j)$

ב. אם (X,Y) מ"מ רציף, אז: $E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x_i,y_j)f_{X,Y}(x_i,y_j)dxdy$

משפט

אם $Z=X+Y$ אז $E(Z)=E(X)+E(Y)$.

הוכחה

(עבור (X,Y) רציף).

לפי הנוסחה: $E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)\,f_{X,Y}(x_i,y_j)\,dxdy$, ולכן:

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X,Y}(x_i,y_j)\,dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}yf_{X,Y}(x_i,y_j)\,dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xdx\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x_i,y_j)\,dy}_{f_X(x)}\right)+\int_{-\infty}^{\infty}ydy\left(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x_i,y_j)\,dx}_{F_Y(y)}\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,dx+\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\,dy=E(X)+E(Y)$$

<u>תרגיל</u>

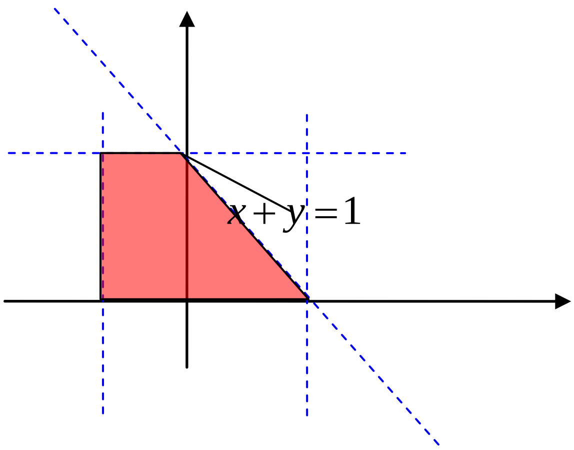
נתון: $f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & |x|\le 1, 0\le y\le 1, x+y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$.

א. מצא $F_Z(z)$ כאשר $Z=Y-X$.

ב. מצא $E(X+Y)^2$.

<u>פתרון</u>

א.



$$F_Z(z)=\iint_{D_Z}f_{X,Y}(x,y)\,dxdy$$

$$D_Z=\{(x,y):y-x\le z,(x,y)\in D\}$$

$-1 \le z < 1:$

$$F_Z(z) = \iint_{D_Z} \frac{2}{3} dxdy = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1+z}{2}} dy \int_{y-z}^{1-y} dx = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1+z}{2}} x\Big|_{y-z}^{1-y} dy = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1+z}{2}} \left[(1-y)-(y-z)\right] dy =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{1+z}{2}} (1+z-2y)\, dy = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{(1+Z-2y)^2}{2} \Bigg|_0^{\frac{1+z}{2}} = \frac{1}{6}(1+z)^2$$

$1 \le z < 2:$

$$F_Z(z) = 1 - \iint_{D_Z} \frac{2}{3} dxdy = 1 - \frac{2}{3} \int_{z-1}^{1} dy \int_{-1}^{y-z} dx = 1 - \frac{2}{3} \int_{z-1}^{1} x\Big|_{-1}^{y-z} dy = 1 - \frac{2}{3} \int_{z-1}^{1} \left[(y-z)+1\right] dy$$

$$= 1 - \frac{2}{3} \int_{z-1}^{1} (y-z+1)\, dy = 1 - \frac{2}{3} \frac{(y-z+1)^2}{2} \Bigg|_{z-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3}\left[(2-z)^2 - (z-1-z+1)^2\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(2-z)^2$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < -1 \\ \frac{1}{6}(1+z)^2 & -1 \le z < 1 \\ 1 - \frac{1}{3}(2-z)^2 & 1 \le z < 2 \\ 1, & z \ge 2 \end{cases}$$

ב.

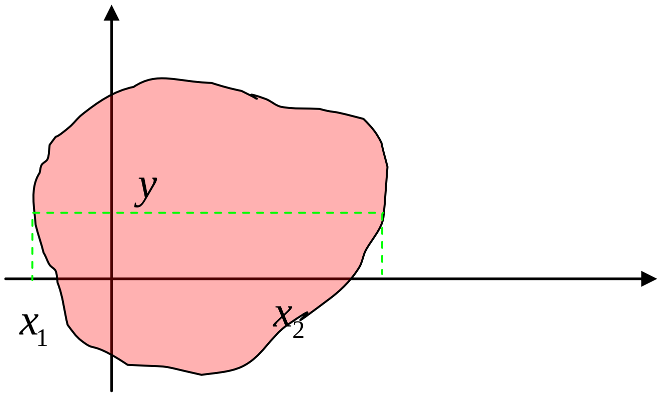
$$Eg(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dxdy = \iint_D (x+y)^2 \cdot \frac{2}{3} dxdy =$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^1 dy \int_{-1}^{1-y} (x+y)^2 dx = \frac{2}{3} \int_0^1 \frac{(x+y)^3}{3} \Bigg|_{-1}^{1-y} dy = \frac{2}{9} \int_0^1 \left[1-(y-1)^3\right] dy =$$

$$= \frac{2}{9}\left[1 - \left(0 - \frac{1}{4}\right)\right] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

משתנה מקרי מותנה

נתון מ"מ דו-מימדי (X,Y) עם בסיס D.



לפי הגדרה, פוני הצפיפות של מ"מ $X|Y=y$ נתונה לפי הנוסחא:

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

תוחלת של משתנה מקרי מותנה

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf_{X|Y}(x|y)dx$$

$$E(Y|X=x)=\int_{-\infty}^{\infty} yf_{Y|X}(y|x)dy$$

<u>תרגיל</u>

בתרגיל הקודם, מצא:

א. $f_{X|Y}(x|y)$, $f_{Y|X}(y|x)$.

ב. $E\left(Y|X=\frac{1}{2}\right)$, $E\left(X|Y=\frac{1}{2}\right)$.

<u>פתרון</u>

א.

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2}{3}(2-y), & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\frac{1}{2-y}, & -1<x<1-y\\ 0, & else\end{cases}$$

כאשר $0<y<1$:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & -1<x<0\\ \frac{2}{3}(1-x), & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

1. $-1<x<0$:

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

2. $0<x<1$:

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & 0<y<1-x\\ 0, & else\end{cases}$$

ב.

$$f_{X|Y}\left(x\mid\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{2}{3}, & -1<x<\frac{1}{2}\\ 0, & else\end{cases}\Rightarrow E\left(X\mid\frac{1}{2}\right)=\int_{-1}^{1/2}x\cdot\frac{2}{3}dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1/2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-1\right)=-\frac{1}{4}$$

$$f_{Y|X}\left(y\mid\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}2, & 0<y<\frac{1}{2}\\ 0, & else\end{cases}\Rightarrow E\left(Y\mid\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{1/2}y\cdot 2dx=2\cdot\frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{1/2}=\frac{1}{4}$$

משתנים מקריים בלתי תלויים

הגדרה

משתנים מקריים X ו-Y ב"ת אם לכל (X,Y) מתקיים:

$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

משפט

א. אם (X,Y) בדיד, אז X ו-Y ב"ת $\Leftrightarrow$ לכל (x,y) מתקיים:

$f_{X,Y}(x_i,y_j)=f_X(x_i)\cdot f_Y(y_j)$.

אם קיים (x_i,y_j) כך ש- $f_{X,Y}(x_i,y_j)\neq f_X(x_i)\cdot f_Y(y_j)$ אזי X ו-Y תלויים.

ב. אם (X,Y) רציף, אז X ו-Y ב"ת $\Leftrightarrow$ לכל (X,Y) מתקיים:

$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

אם קיים (x,y) כך ש- $f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, אזי X ו-Y תלויים.

תרגיל

יש שני אלמנטים ב"ת בעלי זמן חיים המתפלג מעריכית.

לראשון ממוצע זמן חיים שעה, ולשני שעתיים. מהי ההסתברות שהראשון יעבוד יותר מהשני?

פתרון

$X\sim \exp(\lambda_1)$

$Y\sim \exp(\lambda_2)$

$EX=1; EY=2$

$$1=EX=\frac{1}{\lambda_1}\Rightarrow \lambda_1=1$$

$$2=EY=\frac{1}{\lambda_2}\Rightarrow \lambda_2=\frac{1}{2}$$

צ"ל $p(X>Y)$:

$$p\Big(\underbrace{X-Y>0}_{D_1}\Big)=p\big((x,y)\in D_1\big)=\iint_{D_1\cap D} f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=$$
$$=\iint_{D_1\cap D} f_X(x)\cdot f_Y(y)\,dxdy$$

$$f_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & y\ge 0\end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}e^{-x}\cdot\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}y}, & x\ge 0, y\ge 0\\ 0, & else\end{cases}$$

$$p(X-Y>0)=\frac{1}{2}\iint_{D_1}e^{-x}\cdot e^{-\frac{1}{2}y}dxdy=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}dx\int_0^{x}e^{-x}\cdot e^{-\frac{1}{2}y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-2)\int_0^{\infty}e^{-x}\cdot e^{-\frac{1}{2}y}\Big|_0^x dx=\int_{\infty}^{0}e^{-x}\left(e^{-\frac{1}{2}x}-1\right)dx=\int_{\infty}^{0}e^{-\frac{3}{2}x}-e^{-x}dx=$$

$$=-\frac{2}{3}e^{-\frac{2}{3}x}+e^{-x}\Big|_{\infty}^{0}=\frac{1}{3}$$

שונות משותפת ומקדם מתאם

שונות של סכום של מ"מ

ידוע שאם X ו-Y ב"ת, אז $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$.

כעת נניח ש-X ו-Y תלויים. אזי:

$$Var(X+Y)=E\left[(X+Y)-E(X+Y)\right]^2=E\left[(X-EX)+(Y-EY)\right]^2=$$
$$=E\left[(X-EX)^2+(Y-EY)^2+2(X-EX)(Y-EY)\right]=$$
$$=Var(X)+Var(Y)+\underbrace{2E(X-EX)(Y-EY)}_{\text{שונות}}$$

<u>הגדרה</u>

שונות משותפת בין משתנים מקריים X ו-Y היא מספר הנתון ע"י הנוסחא:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)$$

לכן: $Var(X\pm Y)=Var(X)+Var(Y)\pm 2\operatorname{cov}(X,Y)$

<u>הגדרה</u>

המספר $\rho(X,Y)=\dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}$ נקרא "מקדם המתאם של מ"מ X ו-Y".

חישוב שונות משותפת ומקדם מתאם

א. $\operatorname{cov}(X,Y)=E(X\cdot Y)-EX\cdot EY$

ב. אם (X,Y) בדיד, אז: $\operatorname{cov}(X,Y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_iy_jf_{X,Y}(x_i,y_j)-EX\cdot EY$

ג. אם (X,Y) רציף, אז: $\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy-EX\cdot EY$

<u>תרגיל</u>

מ"מ דו-מימדי (X,Y) נתון ע"י פוני הסתברות:

x \ y	-2	-1	0	1	2	$f_X(x)$
0	0	0	1/9	0	0	1/9
1	0	1/9	1/9	1/9	0	3/9
2	1/9	1/9	1/9	1/9	1/9	5/9
$f_Y(y)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9	$\Sigma=1$

א. האם X ו-Y ב"ת?

ב. מצא $\operatorname{cov}(X,Y)$ ו- $\rho(X,Y)$

פתרון

א. $f_{X,Y}(0,-2) \neq \frac{1}{9} = f_y(-2) \cdot f_X(0); f_{X,Y}(0,-2) = 0$. לכן X ו-Y תלויים.

ב.
$$\operatorname{cov}(X,Y) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} x_i y_j f_{X,Y}(x_i, y_j) - EX \cdot EY =$$
$$= 1(-1)\frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{4}{9} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} - \left(\frac{3}{9} + \frac{10}{9}\right)\left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\right) = 0$$

מכיוון ש- $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, גם $\rho(X,Y)$ מתאפס.

מ"מ מתואמים ובלתי-מתואמים

הגדרה

אם $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ אז X ו-Y נקראים "בלתי מתואמים". אחרת, הם נקראים "מתואמים".

תכונות

א. אם X ו-Y ב"ת, אזי $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, ולכן הם בלתי מתואמים.
אם X ו-Y בלתי מתואמים, אין זה אומר שהם בלתי תלויים בהכרח.

ב. אם X ו-Y בלתי מתואמים, אזי:

I. $\rho(X,Y) = 0$.

II. $\operatorname{var}(X \pm Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$

III. $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$

תכונות של שונות משותפת

א. $\operatorname{cov}(X,Y) = \operatorname{cov}(Y,X)$

ב. $\operatorname{cov}(aX,Y) = a\operatorname{cov}(X,Y); \operatorname{cov}(X_1 \pm X_2, Y) = \operatorname{cov}(X_1,Y) \pm \operatorname{cov}(X_2,Y)$

ג. $\operatorname{cov}(X \pm C, Y) = \operatorname{cov}(X,Y)$

ד. $\operatorname{cov}(X,X) = \operatorname{var}(X)$

תכונות של מקדם מתאם

א. $|\rho(X,Y)| \leq 1$

ב. X ו-Y בלתי מתואמים $\rho(X,Y)=0 \Leftrightarrow$.

ג. $|\rho(X,Y)|=1 \Leftrightarrow Y=aX+b$

הוכחה

א.

$$\operatorname{var}\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)\ge 0 \Rightarrow \operatorname{var}\left(\frac{X}{\sigma_X}\right)+\operatorname{var}\left(\frac{Y}{\sigma_Y}\right)-2\operatorname{cov}\left(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y}\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{(\sigma_X)^2}\operatorname{var}(X)}_{=1}+\underbrace{\frac{1}{(\sigma_Y)^2}\operatorname{var}(Y)}_{=1}-2\underbrace{\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\operatorname{cov}(X,Y)}_{=\rho(X,Y)}\ge 0$$

$$\Rightarrow 2\rho(X,Y)\le 2 \Rightarrow \rho(X,Y)\le 1$$

ג. נניח ש-$Y=aX+B$. אזי:

$$\rho(X,aX+b)=\frac{\operatorname{cov}(X,aX+b)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(aX+b)}}=\frac{a\operatorname{cov}(X,X)}{|a|\sigma_X\sigma_X}=\frac{a\operatorname{var}(X)}{|a|\sigma_X\sigma_X}=\pm 1$$

נניח ש-$|\rho(X,Y)|=1$. אזי:

מהוכחת ס' א' נקבל שאם $\operatorname{var}\left(\frac{X}{\sigma_X}\pm\frac{Y}{\sigma_Y}\right)=0$, $\frac{X}{\sigma_X}\pm\frac{Y}{\sigma_Y}=C$.

מכאן נובע שבין X ל-Y קיים קשר ליניארי.

דוגמאות לחישוב שונות משותפת ומקדם מתאם

ישנן 3 דרכים לחישוב:

א. לפני נוסחה.

ב. שימוש בנוסחת השונות.

ג. פיתוח X ו/או Y לסכום.

תרגיל

מטילים קוביה 10 פעמים.

נסמן: X – מס' הפעמים שהתקבל המספר "1".

Y – מס' הפעמים שהתקבל המספר "2".

מצא $\operatorname{cov}(X,Y)$ ו-$\rho(X,Y)$.

פתרון

$$Y\sim B\left(n=10,\,p=\frac{1}{6}\right);\,X\sim B\left(n=10,\,p=\frac{1}{6}\right)$$

שונות של מ״מ בינומי : $\mathrm{var}(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$.

$$X+Y\sim B\left(n=10,\ p=\frac{1}{3}\right)$$

$$\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)+2\,\mathrm{cov}(X,Y)$$

$$\Rightarrow 10\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=2\cdot 10\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+2\,\mathrm{cov}(X,Y)\Rightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=\frac{\frac{20}{9}-\frac{100}{36}}{2}$$

<u>תרגיל</u>

מטילים קוביה מספר פעמים.

נסמן : X – מספר הפעמים עד שמקבלים ״1״ בפעם הראשונה.

Y – מספר הפעמים עד שמקבלים ״1״ בפעם השנייה.

מצא $\mathrm{cov}(X,Y)$ ו- $\rho(X,Y)$.

<u>פתרון</u>

$$X\sim G\left(p=\frac{1}{6}\right);Y=X+Z,Z\sim G\left(p=\frac{1}{6}\right)$$

$$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(X,X+Z)=\mathrm{cov}(X,X)+\mathrm{cov}(X,Z)=$$

$$=\mathrm{var}(X)+0=\mathrm{var}(X)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{5/6}{1/36}=30$$

(X ו-Z ב״ת, לכן $\mathrm{cov}(X,Z)=0$).

$$\rho(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{30}{\sqrt{30}\cdot\underbrace{\sqrt{\mathrm{var}(X+Z)}}_{=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Z)=60}}=\frac{30}{\sqrt{30}\sqrt{60}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

משפט הגבול המרכזי

שימושי המשפט

א. משתנה מקרי ניתן לפרק לסכום של משתנים מקריים.

ב. בשאלה יש סכום של מספר גדול של משתנים מקריים.

ג. שימושי בסטטיסטיקה.

משמעות המשפט

סכום של מספר גדול של משתנים מקריים מתפלג נורמלית בקירוב.

משפט הגבול המרכזי

נניח ש- $X_1, X_2, \dots, X_n$ מ״מ ב״ת זהים (בעלי אותה פונקצית צפיפות/התפלגות).

נסמן : $\overline{X}=\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}$, $EX_n=\mu$, $\sigma(X_n)=\sigma$. אזי :

א. $$\lim_{n\to\infty} p\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu n}{\sigma\cdot\sqrt{n}}<t\right)=\Phi(t)$$

ב. $$\lim_{n\to\infty} p\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<t\right)=\Phi(t)$$

כלומר : $$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k-\mu n}{\sigma\cdot\sqrt{n}}\approx N\left(\mu=0,\sigma^2=1\right)$$

<u>תרגיל</u>

בעל משאית היכולה לשאת משקל של עד 2.5 טון רוצה לקבוע מקום ל-1,000 אבטיחים ולפירות אחרים. מה אחוז המקום שעליו לספק לאבטיחים כך שההסתברות שהמקום יהיה מספיק לאבטיחים אינה קטנה מ-0.9?

משקל כל אבטיח הוא משתנה מקרי $X_K \sim U(1,3)$.

<u>פתרון</u>

נסמן : X – משקל כל האבטיחים. $X=\sum_{k=1}^{1000} X_K$.

נסמן : a – חלק המשקל שמייעד בעל המשאית לאבטיחים. $p\left(\sum_{k=1}^{1000}<a\geq 0.9\right)$.

צ״ל a.

$$\mu=EX_k=\frac{a+b}{2}=2$$

$$\sigma^2=\operatorname{var}(X_k)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sigma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$p\left(\sum_{k=1}^{1000}<a\geq 0.9\right)=p\left(\frac{\sum_{k=1}^{1000}X_k-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}<\frac{a-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\approx p\left(Z<\frac{a-2000}{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1000}}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{a-2000}{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1000}}\right)\geq 0.9$$

מהטבלה נמצא כי $\Phi(1.28)=0.9$. מכאן:

$$\frac{a-2000}{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1000}}\geq 1.28\Rightarrow a\geq 2000+1.28\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1000}=2,023$$

<u>תרגיל</u>

זמן המתנה אצל רופא משפחה מתפלג מעריכית עם ממוצע של 10 דק'.

מה מספר החולים שיעברו בתור אצל רופא במשך יום עבודה (8 שעות), עם בטחון שאינו קטן מ-0.95?

<u>פתרון</u>

$X_K\sim\exp(\lambda)$. $EX_k=10=\frac{1}{\lambda}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{10}$.

לפי הנתון: $p\left(\sum_{k=1}^{n}X_k<\underbrace{480}_{=8\cdot 60}\right)\geq 0.95$. $n=?$.

$$\mu=\sigma=EX_k=10$$

$$p\left(\sum_{k=1}^{n}X_k<480\right)=p\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}<\frac{480-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)\approx p\left(Z<\frac{480-10n}{10\sqrt{n}}\right)=\Phi\left(\frac{48-n}{\sqrt{n}}\right)\geq 0.55$$

לפי הטבלה: $\Phi(1.65)=0.95$.

$$\frac{48-n}{\sqrt{n}}\geq 1.65\sqrt{n}\Rightarrow n+1.65\sqrt{n}-48\leq 0\Rightarrow n_{\max}=(6.1)^2=37.2$$

קירוב נורמלי למ"מ בינומי

משפט (מואבר-לפלס)

אם $X\sim B(n,p)$ ו-$n\cdot p\ge 5, n(1-p)\ge 5$ אז:

$$p(k_1\le x\le k_2)\approx\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

הוכחה

נסמן: $x_k=\begin{cases}1, & Success(k)\\ 0, & else\end{cases}$. אזי $X=\sum_{i=1}^{k}x_i$.

פונקציית ההסתברות של x_k:

x_k	0	1
$f_{x_k}(x)$	1-p	p

פונקציית ההסתברות של $x_k{}^2$:

$x_k{}^2$	0	1
$f_{x_k{}^2}(x)$	1-p	p

$$\mu=Ex_k=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$
$$\sigma^2=\mathrm{var}(x_k)=E\left(x_k{}^2\right)-(Ex_k)^2=0\cdot(1-p)+1\cdot p-p^2=p(1-p)$$
$$\Rightarrow\sigma=\sqrt{p(1-p)}$$

לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\approx N(\mu=0,\sigma^2=1)$$

$$\Rightarrow\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\approx N(\mu=0,\sigma^2=1)\Rightarrow p(k_1\le X\le k_2)=p\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

תרגיל

בממוצע, לכל 10 משפחות יש 7 מכוניות. ההסתברות שלמשפחה 2 מכוניות ומעלה היא יחסית קטנה. בבית דירות חדש יש 100 דירות. כמה מקומות חניה יש להכין בכדי שבבטחון לא קטן מ-0.9 המקומות הללו יהיו מספיקים לדיירי הבית?

<u>פתרון</u>

נסמן : X – מספר המכוניות בבית.

$$X \sim B\left(n=1, p=0.7\right)$$

נסמן : a – מספר מקומות החניה במגרש.

נתון : $p\left(X \le a\right) \ge 0.9$.

נבצע קירוב נורמלי ל-X :

$$p\left(\underbrace{\frac{X-np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}}_{Z} \le \frac{a-np}{\sqrt{np\left(1-p\right)}}\right) \ge 0.9 \Rightarrow \Phi\left(\frac{a-100\cdot 0.7}{\sqrt{100\cdot 0.7\cdot 0.3}}\right) \ge 0.9$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{a-70}{\sqrt{29}}\right) \ge 0.9 \Rightarrow \frac{a-70}{\sqrt{29}} \ge 1.28 \Rightarrow a \ge 75.9 \Rightarrow a_{\min} = 76$$

חזרה

מבנה המבחן

אורך : 3 שעות.

יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. כל ה-5 תבדקנה, והציון יינתן על-פי ה-4 הטובות ביותר (לכל שאלה – 25 נקי).

3 דפי נוסחאות מצורפים לטופס המבחן.

מבחן מ-14/7/04

שאלה 1

נתון : G – משולש עם קודקודים בנקי $(0,2),(-1,0),(1,0)$.

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} c\cdot y & (x,y)\le G \\ 0, & else \end{cases}$$

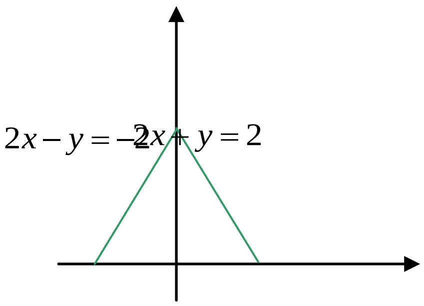
א. מצא את c.

ב. מצא את $f_X(x), f_Y(y), E(Y|X=0.5)$.

ג. מצא את $p(Y>X, Y>-X)$.

ד. מצא את $F_Z(1)$ כאשר $Z=X+Y$.

<u>פתרון</u>



א. $c\iint\limits_G ydxdy=1\Rightarrow c\int dy\int\limits_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} ydx=1\Rightarrow c\int\limits_0^2\left(yx\Big|_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}}\right)=1\Rightarrow c=\frac{3}{4}$

ב. עבור $-1\le x\le 0$:

$$f_X(x)=\int\limits_0^{2x+2}\frac{3}{4}ydy=\frac{3}{8}(2+2x)^2$$

עבור $0 < x \le 1$:

$$f_X(x) = \int_0^{2-2x} \frac{3}{4} y dy = \frac{3}{8}(2-2x)^2$$

מכאן :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \begin{cases} \frac{3}{8}(2+2x)^2, & -1 \le x \le 0 \\ \frac{3}{8}(2-2x)^2, & 0 < x \le 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

עבור $0 \le y \le 2$:

$$f_Y(y) = \int_{-1+\frac{y}{2}}^{1-\frac{y}{2}} \frac{3}{4} y dx = \frac{3}{4} y(2-y)$$

מכאן :

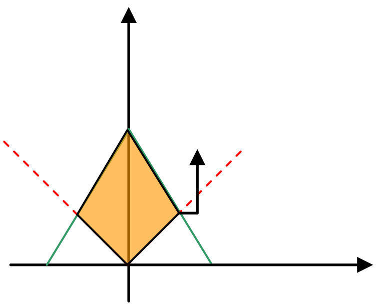
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \begin{cases} \frac{3}{4} y(2-y), & 0 \le y \le 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

$$E(Y \mid X = 0.5) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(Y \mid X = 0.5) dy$$

$$f_{Y|X}(Y \mid X) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \Rightarrow f_{Y|X}(Y \mid X = 0.5) = \frac{f_{X,Y}(0.5,y)}{f_X(0.5)} = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1 \\ 0, & else \end{cases}$$

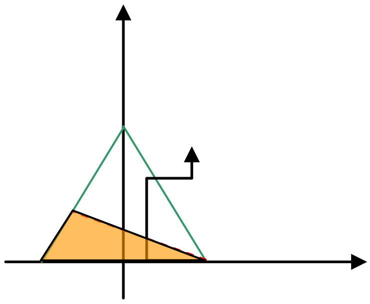
$$E(Y \mid X = 0.5) = \int_0^1 y \cdot 2y dy = \left. \frac{2y^3}{3} \right|_0^1 = \frac{2}{3}$$

ג.



$$p(Y > X, Y > -X) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)dxdy = \frac{3}{4}\int_{-2/3}^{0} dx \int_{-x}^{2+2x} ydy + \frac{3}{4}\int_0^{2/3} dx \int_x^{2-2x} ydy = \frac{2}{3}$$

ד.



$$F_Z(1)=p(x+y\le 1)=\iint_D \frac{3}{4}ydxdy=\frac{3}{4}\int_0^{2/3}dy\int_{\frac{y-2}{2}}^{1-y}ydx=\frac{4}{9}$$

שאלה 2

נתון: $X\sim U(-2,1)$, $Y=X|X|$.

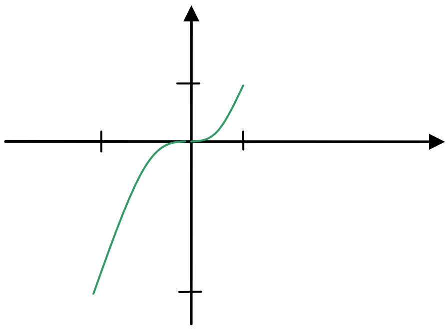
$$V=\begin{cases}2+x, & -2\le x<-1\\ x, & 0<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

א. מצא את $f_Y(y)$.

ב. מצא את $F_V(v)$.

ג. $Y_1,...,Y_n$ ב"ת ומתפלגים כמו Y. מצא בקירוב את $p\left(\left|\sum_{i=1}^{100}Y_i-100\right|>2\right)$.

<u>פתרון</u>



א. $x=\pm\sqrt{-y}$.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -2<x<1\\ 0, & else\end{cases}$$

עבור $-4<y<0$:

$$h_1(y)=-\sqrt{-y}$$

$$f_Y(y)=f_X(h_1(y))\cdot|h_1'(y)|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-y}}$$

עבור $0<y<1$:

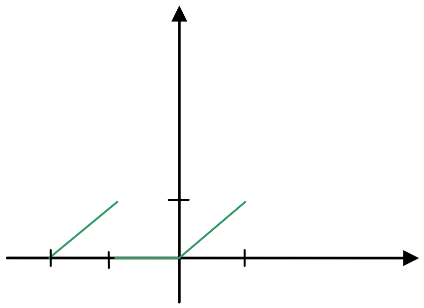
$$h_2(y)=\sqrt{y}$$

$$f_Y(y)=f_X(h_2(y))\cdot|h_2'(y)|=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

לכן :

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{6\sqrt{-y}}, & -4<y<0\\ \frac{1}{6\sqrt{y}}, & 0<y<1\\ 0, & else\end{cases}$$

ב.



$$F_V(v)=p(V\le v)=p(V=0)+p(0<V<v)=$$
$$=p(-1<X<0)+p(-2<X<v-2)+p(0<X<v)=$$
$$=F_X(0)-F_X(-1)+F_X(v-2)-F_X(-2)+F_X(v)-F_X(0)=\frac{2v+1}{3}$$

ג.

$$E\left(g\left(x\right)\right)=\int_{-\infty}^{\infty} g\left(x\right) f_X\left(x\right)dx$$

$$\mu = EY = E\left(X\left|X\right|\right)=\int_{-2}^{1} X\left|X\right|\cdot\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\int_{-2}^{0}-X^2dx+\int_{0}^{1}X^2dx\right]=-\frac{7}{9}$$

$$\sigma^2=\text{var}\left(Y\right)=E\left(Y^2\right)-\left(EY\right)^2=E\left(X^4\right)-1=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}x^4dx-1=\frac{18}{15}$$

$$\Rightarrow \sigma=\sqrt{\frac{18}{15}}$$

$$p\left(\left|\sum_{i=1}^{100}Y_i-100\right|>2\right)=1-p\left(\left|\sum_{i=1}^{100}Y_i-100\right|\le 2\right)=1-p\left(98\le\sum_{i=1}^{100}Y_i\le 102\right)=$$

$$=1-p\left(\frac{98-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\le\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{100}Y_i-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}}_{Z}\le\frac{102-\mu n}{\sigma\sqrt{n}}\right)=1-\left[\Phi\left(\frac{102-\frac{700}{9}}{\sqrt{\frac{18}{15}}\cdot 10}\right)-\Phi\left(\frac{98-\frac{700}{9}}{\sqrt{\frac{18}{15}}\cdot 10}\right)\right]=\ldots$$