Preactions and universal actions

Chapter · January 1985

1 author:

Michael Megrelishvili
Bar Ilan University

АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР

ТБИЛИССКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им.А.М.РАЗМАДЗЕ

На правах рукописи

МЕГРЕЛИШВИЛИ МИХАИЛ ГУРАМОВИЧ

УДК 515.122

РАВНОМЕРНОСТЬ И НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(01.01.04 - Геометрия и топология)

Д И С С Е Р Т А Ц И Я

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель -
кандидат физико-математических наук
ЭЛАШВИЛИ А.Г.

Тбилиси - 1985

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ГЛАВА I. ЭКВИВАРИАНТНЫЕ ПОПОЛНЕНИЯ И БИКОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ

§ 1. Эквивариантные пополнения 11

§ 2. Эквивариантные бикомпактные расширения 34

§ 3. Эквинормальные G-пространства 53

ГЛАВА II. ЭКВИВАРИАНТНЫЕ ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ И АППРОКСИМАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 4. Факторизационные теоремы для G-пространств...67

§ 5. Аппроксимационные теоремы для G-пространств...80

ГЛАВА III. ПРЕДДЕЙСТВИЯ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИЯ

§ 6. Вложения топологических пространств........... 90
в пространства с транзитивным действием

§ 7. B-эквивалентные пространства.............. 112

ЛИТЕРАТУРА 116

ГЛАВА III

ПРЕДДЕЙСТВИЯ И УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ДЕЙСТВИЯ

§ 6. Вложения топологических пространств в пространства с транзитивным действием

Пусть G — дискретная группа, а X — топологическое пространство. Действие группы G на пространстве X это тройка (G, X, π), где $\pi: G \to Homeo(X)$ гомоморфизм группы G в группу всех гомеоморфизмов X на себя.

Рассмотрим категорию TTG. Её объекты — это всевозможные действия групп на топологических пространствах. Морфизм из объекта (G_1, X_1, π_1) в объект (G_2, X_2, π_2) представляет собой пару отображений (H, f), где $H: G_1 \to G_2$ — гомоморфизм, а f есть H-эквивариантное отображение, т.е. непрерывное отображение из X_1 в X_2, удовлетворяющее условию:

$$f(gx) = H(g)f(x) \quad \forall g \in G_1, \ \forall x \in X_1 .$$

Если (G, X, π) — транзитивное действие (т.е. если для любых $x, y \in X$ существует такое $g \in G$, что $gx = y$), то данное действие (а иногда само пространство X) называем однородным пространством.

<u>Определение 3.1</u>. Категория $\mathcal{P}$ называется группоидом, если все ее морфизмы обратимы. Группоид Q называется подгруппоидом группоида $\mathcal{P}$, если он является его подкатегорией.

В дальнейшем мы часто допускаем одинаковые обозначения для категории и класса его морфизмов.

Для любого топологического пространства X символом $T(X)$ будем обозначать группоид всех частичных гомеоморфизмов пространства X. Объекты категории $T(X)$ это все подпространства пространства X, а морфизмы между объектами A, B — всевозможные гомеоморфизмы A на B. Композиция морфизмов определяется естественным образом. Если $\sigma, \delta \in T(X)$ частичные гомеоморфизмы и $\operatorname{Im}\delta = \operatorname{Coim}\sigma$ (где $\operatorname{Im}\delta$ и $\operatorname{Coim}\sigma$ это соответственно образ отображения δ и прообраз отображения σ), то $\omega(\sigma, \delta)$ по определению, обычная композиция $\sigma \circ \delta$. Тем самым на множестве $T(X)$ имеется частичная бинарная операция ω. Введем теперь на множестве $T(X)$ бинарную операцию ω^*. Если $\sigma, \delta \in T(X)$ и $\operatorname{Im}\delta \cap \operatorname{Coim}\sigma \equiv A \neq \emptyset$, тогда $\omega^*(\sigma, \delta) \equiv \sigma * \delta$ определяется как отображение $\delta^{-1}(A) \to \sigma(A)$ по следующему правилу: $(\sigma * \delta)(x) = \sigma(\delta(x))$ для каждого $x \in A$. Если же $A = \emptyset$, то полагаем $\sigma * \delta = o$, где o — пустая подстановка.

<u>Лемма 3.I.</u> Пусть σ, δ, τ — элементы множества $T(X)$. Тогда

1. $\sigma * \delta \in T(X)$.
2. $(\sigma * \delta) * \tau = \sigma * (\delta * \tau)$.
3. $\sigma * Id_X = Id_X * \sigma = \sigma$ (Id_X — тождественное отображение X);
4. $\sigma * 0 = 0 * \sigma = 0$.
5. Обычная композиция ω морфизмов в $T(X)$ есть подоперация операции ω^*, причем

$$(\sigma * \delta = \sigma \circ \delta) \Longleftrightarrow (\operatorname{Im}\delta = \operatorname{Coim}\sigma).$$

Доказательство тривиально.

Введем теперь понятие, играющее в дальнейшем центральную роль.

Определение 3.2. Пусть X топологическое пространство, $\mathcal{P}$ группоид, а $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow T(X)$ некоторый функтор. Тройка $(\mathcal{P}, X, \pi)$ называется преддействием группоида $\mathcal{P}$ на пространстве X.

Всякая группа G есть группоид с одним объектом (и наоборот), а каждое действие группы G на пространстве X это гомоморфизм группы G в группу $\mathrm{Homeo}\, X$, т.е. функтор из группоида G в группоид $\mathrm{Homeo}\, X$. Учитывая естественное вложение $\mathrm{Homeo}\, X$ в группоид $T(X)$, получаем, что всякое действие естественным образом можно рассматривать как преддействие в смысле определения 3.2. Это один из фактов, мотивирующих название введенного понятия.

Замечание. Очень часто удобно ограничиться рассмотрением эффективных действий, т.е. тех действий, для которых присоединенный гомоморфизм инъективен. Точно так же, в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением эффективных преддействий. По аналогии, преддействие $\pi : \mathcal{P} \longrightarrow T(X)$ называется эффективным, если функтор π представляет собой естественное вложение подгруппоида $\mathcal{P}$ в группоид $T(X)$

Итак, из-за нашего соглашения задание преддействия на пространстве X означает выделение некоторого подгруппоида $\mathcal{P}$ в группоиде $T(X)$. Поэтому, преддействия иногда будут записываться в виде пар вида $(\mathcal{P}, X)$.

Пример 3.I. Пусть (G, Y, π) некоторое действие, а X есть подпространство пространства Y. Для всякого $g \in G$ "след" g_X отображения $\pi(g)$ на подпространство X

представляет собой частичный гомеоморфизм пространства X. Отображение g_X определяется так: $\mathrm{Coim}\, g_X = \pi(g^{-1})(X) \cap X$, $\mathrm{Im}\, g_X = \pi(g)(X) \cap X$, $g_X(x) = gx$. Заметим, что $(g_X)^{-1} = (g^{-1})_X$. Поэтому, совокупность всех таких "следов" пополненная их всевозможными композициями представляет собой некоторое преддействие π_X на пространстве X. Ясно, что любое σ из π_X есть сужение отображения $\pi(g)$ для некоторого $g \in G$. Очевидно, π_X есть действие в точности тогда, когда X инвариантно в Y.

В связи с понятием преддействия естественно возникают несколько вопросов.

I. Пусть задано преддействие $(\mathcal{P}, X)$. Существует ли действие (G, Y) и вложение X в Y, согласованное в некотором смысле с $\mathcal{P}$ и G ?

II. Если вложение, отвечающее вопросу I возможно, то можно ли выбрать среди всех таких действий наиболее "неслучайное", в некотором смысле универсальное ?

III. Если X принадлежит к какому-нибудь "хорошему" классу $\mathcal{A}$ топологических пространств, то можно ли выбрать Y из того же класса $\mathcal{A}$?

<u>Определение 3.3.</u> а) Скажем, что топологическое пространство X K-однородно, если для любого гомеоморфизма $\sigma: A \longrightarrow B$, где A и B бикомпактные подпространства, существует гомеоморфизм $\bar{\sigma}: X \longrightarrow X$, продолжающее σ.

б) Если вместо бикомпактных A и B рассматривать конечные подпространства, то получится определение Σ-однородности.

в) Скажем, что X локально однородно, если для любых $x,y \in X$ существуют открытые окрестности $O(x)$ и $O(y)$ и гомеоморфизм $\sigma: O(x) \to O(y)$, переводящий x в y.

В дальнейшем нас будет интересовать следующий вопрос.

IУ. Можно ли топологическое пространство из класса $\mathcal{A}$ вложить в Σ-однородное (в K-однородное) пространство из класса $\mathcal{A}$? Следующие примеры преддействий будут использованы в дальнейшем.

<u>Пример 3.2.</u>(i)Рассмотрим группоид $\mathcal{P}_K$,объектами которого являются все бикомпактные подпространства в X ,а морфизмами — всевозможные гомеоморфизмы между ними. Этот группоид определяет преддействие, обозначаемое далее через $(\mathcal{P}_K, X)$.

(ii) Заменив в условии (i) бикомпактные подмножества на конечные или одноточечные, мы получим соответственно преддействия $(\mathcal{P}_\Sigma, X)$ и $(\mathcal{P}_B, X)$.

Определим теперь категорию преддействий $PTTG$. Для этого мы должны определить морфизм между преддействиями.

<u>Определение 3.4.</u> Морфизм из объекта $(\mathcal{P}_1, X_1, \pi_1)$ в объект $(\mathcal{P}_2, X_2, \pi_2)$ это пара $p=(F,f)$,где $F: \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ — функтор, а $f: X_1 \to X_2$ — непрерывное отображение, удовлетворяющее следующим двух условиям:

(I) Для любого объекта A из $\mathcal{P}_1$ множество $f(\pi_1(A))$ содержится в $\pi_2(F(A))$.

(2) $f(\sigma x) = F(\sigma) f(x)$.

для любого σ из $\mathcal{P}_1$ и любого $x \in \mathrm{Coim}\,\sigma$ (то, что $f(x) \in \mathrm{Coim}\,F(\sigma)$ обеспечивается условием (I)).

В категории $PTTG$ композиция морфизмов определяется естественным образом. Ясно, что категория действий TTG есть полная подкатегория в $PTTG$. Мы покажем, что TTG

есть рефлективная подкатегория в $PTTG$. Напомним, что подкатегория R категории S называется рефлективной, если для любого объекта A категории S существует свободный (универсальный) объект в R. Это означает, что имеется объект $\overline{A}$ из R и (универсальный) морфизм $u: A \longrightarrow \overline{A}$ такой, что для любого морфизма $\alpha: A \longrightarrow B$; где $B \in Ob R$, существует и притом единственный такой морфизм $\overline{\alpha}: \overline{A} \longrightarrow B$, что $\overline{\alpha} \circ u = \alpha$.

Функтор $H: C \to D$ называется унивалентным, если для любой пары объектов (A, B) из категории C и любой пары морфизмов $\sigma_1, \sigma_2: A \rightrightarrows B$ выполнено $H(\sigma_1) \neq H(\sigma_2)$, если $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

<u>Определение 3.5</u>. Пусть $\tau = (F, f): (\mathcal{P}_1, X_1) \longrightarrow (\mathcal{P}_2, X_2)$ есть морфизм преддействий. Будем говорить, что τ есть вложение, если $f: X_1 \to X_2$ представляет собой топологическое вложение, а $F: \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$ унивалентный функтор.

Теперь мы можем сформулировать один из основных результатов данной работы.

<u>Теорема 3.I</u>. Для всякого преддействия $(\mathcal{P}, X, \pi)$ имеется универсальное действие $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{X}, \overline{\pi})$. Причем универсальный морфизм $p = (u, i): (\mathcal{P}, X, \pi) \longrightarrow (\overline{\mathcal{P}}, \overline{X}, \overline{\pi})$ есть вложение.

Займемся сперва нахождением функтора $u: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathcal{P}}$.

Для любого группоида $\mathcal{P}$, класс морфизмов которой является множеством, существует универсальная группа $\overline{\mathcal{P}}$. В качестве множества образующих для группы $\overline{\mathcal{P}}$ можно выбрать само множество $\mathcal{P}$. Определяющие соотношения имеют вид:

$$\{ e_A = e_B \,, \ \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \}$$

для всевозможных единичных морфизмов e_A, e_B (где $A, B \in Ob\,\mathcal{P}$) и всевозможных пар морфизмов (σ_1, σ_2), для которых в категории $\mathcal{P}$ определена композиция $\sigma_1 \circ \sigma_2$. Тогда естественное отображение $u: \mathcal{P} \to \overline{\mathcal{P}}$ определяет нужный нам универсальный функтор. В дальнейшем, мы часто будем отождествлять $\sigma \in \mathcal{P}$ и $u(\sigma) \in \overline{\mathcal{P}}$ (там, где это не вызовит недоразумений).

<u>Предложение 3.I</u>. Каждый элемент g универсальной группы $\overline{\mathcal{P}}$ единственным образом может быть представлен в виде произведения $g = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ (где $\sigma_i \in \mathcal{P} \equiv u(\mathcal{P})$) для всякого $i = 1, 2, \cdots, n$) для некоторого редуцированного слова $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$. Причем, слово $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ называется редуцированным, если для любого i в категории $\mathcal{P}$ не определена композиция $\sigma_i \circ \sigma_{i+1}$ и каждое σ_i не является единичным морфизмом. Число n при этом называется длиной элемента g и пишем $\ell(g) = n$.

Для доказательства предложения 3.I можно использовать понятие предгруппы из [I4]. Из структурной теоремы, описывающей строение универсальной группы для данной предгруппы (см.[I4 , стр.304]) непосредственно следует наше утверждение.

Можно поступить иначе. Пусть $\mathcal{P} = \bigsqcup \{\alpha(\mathcal{P}) : \alpha \in S\}$ представление группоида $\mathcal{P}$ в виде прямой суммы своих компонент связности. В каждой компоненте $\alpha(\mathcal{P})$ выбираем один объект X_α и для любого $\alpha \in S$ обозначим через $G(X_\alpha)$ группу автоморфизмов объекта X_α в категории $\mathcal{P}$. Обозначим через Σ множество отмеченных объектов. Для любого объекта $a \in (Ob\,\mathcal{P}) \setminus \Sigma$ (если таковые имеются) выбираем один морфизм φ_a. Тогда доказательство предложения 3.I можно вывести из следующего утверждения.

Лемма 3.2. Универсальная группа $\overline{\mathcal{P}}$ изоморфна свободному произведению (копроизведению) свободной группы F с множеством свободных образующих $M=\{\varphi_\alpha : \alpha\in(Ob\mathcal{P})\setminus\Sigma\}$ на группу $\coprod\{G(X_\alpha): \alpha\in S\}$.

Из предложения 3.I ясно, что отображение $u: \mathcal{P}\to\overline{\mathcal{P}}$ является инъективным на подмножестве $\mathcal{P}\setminus\mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — множество всех единичных морфизмов. В частности, u как функтор, является унивалентным. Причем, $\ell(g)=1$ в точности тогда, когда $g\in u(\mathcal{P}\setminus\mathcal{E})$.

Пусть $(\mathcal{P},X)$ данное преддействие. С помощью операции ω^* мы определим отображение $\overline{\mathcal{P}}\xrightarrow{*}T(X)$. Если $g\in\overline{\mathcal{P}}$ и $g=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$ его редуцированное представление, то положим $g^*=\sigma_1*\sigma_2*\cdots*\sigma_n$. При $\ell(g)=1$, полагаем $g^*=g$, а если $g=e$ единичный элемент группы $\overline{\mathcal{P}}$, то $e^*\equiv Id_X$.

I. $(g^{-1})^*=(g^*)^{-1}$.

2. Отображение $g_1^* * g_2^*$ есть сужение отображения $(g_1g_2)^*$.

Пусть g_1 и g_2 элементы группы $\overline{\mathcal{P}}$. Скажем, что элемент g_1 "меньше" чем g_2 и запишем $g_1<g_2$, если редуцированные представления элементов g_1 и g_2 имеют вид

$$g_1=\sigma_1\cdots\sigma_n\quad,\quad g_2=\sigma_1\cdots\sigma_n\sigma_{n+1}\cdots\sigma_{n+k}\ .$$

Если $g_1=e$, то $g_1\leq g_2$ для любого g_2.

Лемма 3.3. Отношение $\leq$ на группе $\overline{\mathcal{P}}$ является отношением частичного порядка. Для любых элементов $g_1,g_2\in\overline{\mathcal{P}}$ существует $min\{g_1,g_2\}$, обозначаемое далее через $g_1\wedge g_2$.

Доказательство непосредственно следует из предложения

3.I.

Переходим к построению универсального действия $(\overline{\mathcal{P}},\overline{X},\overline{\pi})$.

Наделим группу $\overline{\mathcal{P}}$ дискретной топологией и образуем топологическое произведение $\overline{\mathcal{P}}\times X\equiv\widetilde{X}$. На пространстве $\widetilde{X}$ определим действие $\widetilde{\pi}:\overline{\mathcal{P}}\longrightarrow \mathrm{Homeo}\,\widetilde{X}$ следующим условием

$$\widetilde{\pi}(g):\quad (h,x)\longmapsto(gh,x)$$

для любого $g\in G$ и любой пары $(h,x)\in\widetilde{X}$. Определим теперь отношение эквивалентности Ω на множестве $\widetilde{X}$. Если (g_1,x_1) и (g_2,x_2) элементы из $\widetilde{X}$, то полагаем $(g_1,x_1)\,\Omega\,(g_2,x_2)\overset{def}{=\!=}g_2=g_1h$ (где $h,g_1,g_2\in\overline{\mathcal{P}}$)и $h^*(x_2)=x_1$.

<u>Лемма 3.4</u>. Отношение Ω на множестве $\widetilde{X}$ есть отношение эквивалентности, согласованное с действием $\widetilde{\pi}$.

Доказательство легко следует из отмеченных свойств отображения $\overline{\pi}\overset{*}{\to}T(X)$.

Пусть $\overline{X}$ обозначает факторпространство пространства $\widetilde{X}$ по отношению эквивалентности Ω, а $S:\widetilde{X}\longrightarrow\overline{X}$ естественную проекцию. Ввиду леммы 3.4, действие $\widetilde{\pi}$ определяет естественное действие $\overline{\pi}$ на факторпространстве $\overline{X}$ (при котором S есть эквивариантное отображение).

Слой $\{g\}\times X$ пространства $\widetilde{X}$ обозначаем через X'_g. Его образ $S(X'_g)$ через X_g. Отображение $\widetilde{i}_g: X\longrightarrow X'_g$ где $\widetilde{i}_g(x)=(g,x)$, является гомеоморфизмом, а композиция $i_g=S\circ\widetilde{i}_g: X\longrightarrow\overline{X}$ есть инъективное непрерывное отображение (инъективность отображения i_g легко получается из определения Ω и предложения 3.I). Вместо $\widetilde{i}_e$ и i_e будем писать соответственно $\widetilde{i}$ и i.

<u>Лемма 3.5</u>. Тройка $(\overline{\mathcal{P}},\overline{X},\overline{\pi})=\overline{A}$ есть действие. Пара

$p=(u,i)$ есть морфизм преддействия $(\mathcal{P},X,\pi)=A$ в действие $\bar{A}$. Действительно, мы уже знаем, что u и i являются соответственно функтором и непрерывным отображением. Осталось показать их согласованность (в смысле определения 3.4). Для любого объекта C из $\mathcal{P}$ имеем $\pi(C)=C$, а функтор u переводит объект C в объект $\bar{X}$. Но, $i(C)$ содержится в $\bar{X}$, поэтому условие (I) определения 3.4 очевидным образом выполнено. Проверим выполнение условия (2). Для любого σ из $\mathcal{P}$ и любого $x\in \operatorname{Coim}\sigma$ выполнено:

$$i(\sigma(x))=S(\tilde{i}(\sigma(x)))=S(\sigma,x)=S(\tilde{\pi}(\sigma)\tilde{i}(x))=$$
$$=\bar{\pi}(\sigma)S(\tilde{i}(x))=\bar{\pi}(\sigma)i(x),$$

что доказывает наше утверждение.

Ясно, что

$$\cup\{X'_g : g\in\bar{\mathcal{P}}\}=\tilde{X}, \quad \cup\{X_g : g\in\bar{\mathcal{P}}\}=\bar{X}$$

Очевидно, пространство $\bar{X}$ есть свободное объединение своих подпространств X_g (т.е. подмножество F замкнуто в $\bar{X}$ в точности тогда, когда замкнуто каждое пересечение $F\cap X_g$ в пространстве X_g). Ввиду того, что система $\{X_g : g\in\bar{\mathcal{P}}\}$ есть покрытие множества $\bar{X}$, то для нас важно выяснить по каким подмножествам пересекаются элементы этого покрытия.

Лемма 3.6. (i) $X_{g_1}\cap X_{g_2}=g_1 i(\operatorname{Im}(g_1^{-1}g_2)^*)=$
$=g_1 i(\operatorname{Coim}(g_2^{-1}g_1)^*)$.

В частности,

$$X_{g_1}\cap X_{g_2}\neq\emptyset \iff (g_1^{-1}g_2)^*\neq 0 .$$

(ii) Для любого подмножества A пространства X выполнено:

$$i(A)\cap X_\sigma = i(A\cap \mathrm{Im}\,\sigma) = i(\sigma(A\cap \mathrm{Coim}\,\sigma)), \quad \sigma\in \mathcal{P}\setminus\mathcal{E}$$

Действительно, из определения отношения Ω на множестве $\widetilde{X}$ следует, что

$$(g_1, x_1)\,\Omega\,(e, x_2) \equiv x_2\in \mathrm{Im}\,g^* \text{ и } g^*(x_1) = x_2 .$$

Отсюда следует, что $X_e\cap X_g = i(\mathrm{Im}\,g^*)$. Для получения нужного равенства в общем случае пользуемся равенствами

$$X_{g_1}\cap X_{g_2} = g_1(X_e\cap X_{g_1^{-1}g_2}) \text{ и } (g^*)^{-1} = (g^{-1})^* .$$

Также легко проверяется утверждение (ii).

<u>Лемма 3.7.</u> Пусть для элементов g_1, h_1, g, h группы $\overline{\mathcal{P}}$ выполнены неравенства $g\wedge h\le g_1\le g$, $g\wedge h\le h_1\le h$. Тогда имеет место включение

$$X_g\cap X_h \subseteq X_{g_1}\cap X_{h_1}$$

В частности,

$$X_g\cap X_h\subseteq X_{g\wedge h} .$$

Действительно, легко можно доказать, что

$$\mathrm{Coim}(g_1^{-1}g_2)^* \supseteq \mathrm{Coim}(h^{-1}g)^*$$

Кроме того, из утверждения (ii) леммы 3.6 следует, что для любых $A\subseteq X$ и $\tau\in\overline{\mathcal{P}}$ имеем

$$\tau i(A)\subseteq X_e \iff \mathrm{Coim}\,\tau^*\supseteq A .$$

Из этих фактов и утверждения (i) леммы 3.6 легко получается нужное включение.

Замечание. Лемма 3.7 позволяет проводить индуктивные построения (относительно длины элементов группы $\overline{\mathcal{P}}$).Это обстоятельство часто будет использовано в дальнейшем.

Введем следующие обозначения:

$$L_n = \{ g \in \overline{\mathcal{P}} : \ \ell(g) \leq n \}$$

Предложение 3.2. Отображение $i: X \to \overline{X}$ есть топологическое вложение.

Доказательство. Отображение i инъективно и непрерывно. Осталось доказать, что i замкнуто. Покажем, что для любого замкнутого множества F пространства X существует такое замкнутое подмножество M пространства $\overline{X}$,что $M \cap X_e = i(F)$. Для построения такого M последовательно строятся его "пересечения" F_g с каждым X_g. Построение ведется по индукции.

При $g = e$ полагаем $F_e = i(F)$ и $M_0 = \{F_e\}$.

Предположим, что для любого K ,где $0 \leq K \leq n$ имеется такая система $M_K = \{F_g : g \in L_K\}$, что выполнены условия: 1) $M_i \subseteq M_{i+1}$; 2) $F_g \subseteq X_g$ и $F_e = i(F)$; 3)Каждое $F'_g \equiv i_g^{-1}(F_g)$ замкнуто в пространстве X ;
4) $F_g \cap X_h \subseteq F_h \quad \forall g, h \in L_n$.

Пусть g элемент длины $n+1$ и $g = \sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma_{n+1}$ его редуцированное представление. Рассмотрим пересечение $F_{\check{g}} \cap X_g$. Если это пересечение пусто, то полагаем $F_g \equiv \emptyset$. В противном случае, рассмотрим замкнутое множество $F'_{\check{g}} \equiv i_{\check{g}}^{-1}(F_{\check{g}})$ пространства X , где $\check{g} \equiv \sigma_1 \cdots \sigma_n$. Так как $\sigma_{n+1}: \mathrm{Coim}\, \sigma_{n+1} \to \mathrm{Im}\, \sigma_{n+1}$ есть гомеоморфизм между подпространствами пространства X, то существует такое замкнутое подмножество F'_g пространства X, что σ_{n+1} отображает $F'_g \cap \mathrm{Coim}\, \sigma_{n+1}$ на множество $F'_{\check g} \cap \mathrm{Im}\, \sigma_{n+1}$, т.е.

$$\sigma_{n+1}(F'_g \cap \mathrm{Coim}\, \sigma_{n+1}) = F'_{\check g} \cap \mathrm{Im}\, \sigma_{n+1} \tag{A}$$

Пусть $F_g \equiv i_g(F'_g)$. Тогда выполнено равенство

$$F_g \cap X_{\check g} = F_{\check g} \cap X_g \tag{B}$$

Действительно, $F_g \cap X_{\check g} = \check g\, \sigma_{n+1}(i(F'_g) \cap X_{\sigma^{-1}_{n+1}}) =$
$= \check g\, i(\sigma_{n+1}(F'_g \cap \mathrm{Coim}\, \sigma_{n+1})) = \check g\, i(F'_{\check g} \cap \mathrm{Im}\, \sigma_{n+1}) =$
$= \check g(i(F'_{\check g}) \cap X_{\sigma_{n+1}}) = F_{\check g} \cap X_g$.

При проверке равенства (B) мы воспользовались равенством (A) и леммой 3.6.

Таким образом мы получим систему $M_{n+1} = \{F_g : g \in L_{n+1}\}$. Из леммы 3.7, равенства (B) и индуктивного предположения, с помощью несложных вычислений получается, что $F_g \cap X_h \subseteq F_h$ для любых $g, h \in L_{n+1}$.

Итак, индуктивный шаг сделан. Поэтому мы можем утверждать, что существует система $M_\infty = \{F_g : g \in \overline{\mathcal{P}}\}$, удовлетворяющая условиям: 1') $F_g \subseteq X_g$ и $F_e = i(F)$; 2') Каждое $i_g^{-1}(F_g)$ замкнуто в пространстве X; 3') $F_g \cap X_h \subseteq F_h$.

Пусть $M = \cup\{F_g : F_g \in M_\infty\}$. Тогда M такое замкнутое подмножество пространства $\overline{X}$, что $M \cap X_e = i(F)$. Замкнутость отображения i доказана.

<u>Следствие 3.1.</u> Морфизм $p = (u, i) : (\mathcal{P}, X, \pi) \to (\overline{\mathcal{P}}, \overline{X}, \overline{\pi})$ есть вложение (в смысле определения 3.5).

<u>Следствие 3.2</u>. Сужение отображения S на каждое подмножество X'_g, а также каждое отображение $i_g: X \to \overline{X}$ есть топологическое вложение.

Для доказательства теоремы 3.I осталось показать универсальность морфизма $p=(u,i): (\mathcal{P},X,\pi) \longrightarrow (\overline{\mathcal{P}},\overline{X},\overline{\pi})$. Пусть $q=(\phi,\varphi):(\mathcal{P},X,\pi)\to(G,Y,\theta)$ некоторый морфизм преддействий, причем (G,Y,θ) есть действие. Из универсальности функтора $u: \mathcal{P}\longrightarrow\overline{\mathcal{P}}$ следует существование такого (единственного) гомоморфизма $\overline{\phi}: \overline{\mathcal{P}}\longrightarrow G$, что $\overline{\phi}\circ u=\phi$. Определим отображение $\widetilde{\varphi}: \widetilde{X}\longrightarrow Y$. Для любого $(g,x)\in\widetilde{X}$ полагаем $\widetilde{\varphi}(g,x)=\overline{\phi}(g)\varphi(x)$. Пусть $(g_1,x_1)\,\Omega\,(g_2,x_2)$. Тогда для некоторого $h\in\overline{\mathcal{P}}$ выполнено $g_2=g_1h$ и $h^*(x_2)=x_1$. Пусть $h=\sigma_1\cdots\sigma_n$ редуцированное представление. Используя то, что $\overline{\phi}$ есть гомоморфизм, а q есть морфизм, получаем

$$\overline{\phi}(g_1^{-1}g_2)\varphi(x_2)=\overline{\phi}(\sigma_1)\cdots\overline{\phi}(\sigma_n)\varphi(x_2)=\varphi(h^*(x_2))=\varphi(x_1),$$

поэтому $\overline{\phi}(g_2)\varphi(x_2)=\overline{\phi}(g_1)\varphi(x_1)$. Это означает, что отображение $\widetilde{\varphi}$ перестановочно с эквивалентностью Ω, поэтому $\widetilde{\varphi}$ определяет на пространстве $\overline{X}$ такое непрерывное отображение $\overline{\varphi}$, что $\overline{\varphi}\circ S=\widetilde{\varphi}$. Покажем, что $\overline{\varphi}$ — эквивариантно. Пусть $g\in\overline{\mathcal{P}}$ и $\alpha\in\overline{X}$. Из определения множества $\overline{X}$ ясно, что $\alpha=g_0 i(x)$ для некоторых $x\in X$ и $g_0\in\overline{\mathcal{P}}$. Тогда

$$\overline{\varphi}(g\alpha)=\overline{\varphi}(gg_0i(x))=\overline{\phi}(gg_0)\varphi(x)=$$
$$=\overline{\phi}(g)\overline{\phi}(g_0)\varphi(x)=\overline{\phi}(g)\overline{\varphi}(g_0i(x))=\overline{\phi}(g)\varphi(\alpha)\ .$$

Пара $\bar{q}=(\bar{\varphi},\varphi)$ есть морфизм и $\bar{q}\circ p=q$. Кроме того, из построения легко следует единственность такого $\bar{q}$.

Итак, теорема 3.I полностью доказана.

Заметим, что каждое $\sigma\in\mathcal{P}$ есть сужение гомеоморфизма $\bar{\pi}(\mathcal{U}(\sigma))$ на подпространстве $i(X)$ (если отождествить X и $i(X)$).

Оказывается универсальное действие $(\bar{\mathcal{P}},\bar{X})$ данного преддействия $(\mathcal{P},X)$ можно реализовать с помощью расширения Кана (соответствующие определения см. в[35]). Для того, чтобы уточнить это утверждение нам понадобятся некоторые обозначения. Определим диаграммную схему $\mathcal{P}_M$. Класс ее объектов - это, по определению, множество всех объектов категории $\mathcal{P}$, пополненное, быть может, объектом X. Каждый морфизм (кроме, быть может, морфизма Id_X) имеет вид $\varepsilon_{A,B}$ или σ, где $\sigma\in\mathcal{P}$, $A\subseteq B$, $A,B\in Ob\mathcal{P}_M$ и $\varepsilon_{A,B}$ — естественное вложение A в B. Пусть $\pi:\mathcal{P}_M\to TOP$ естественное вложение $\mathcal{P}_M$ в категорию топологических пространств. Рассмотрим также диаграмму $G:\mathcal{P}_M\to\bar{\mathcal{P}}$, где $G(\sigma)=\mathcal{U}(\sigma)$ и $G(\varepsilon_{A,B})=e$, а $\mathcal{U}:\mathcal{P}\to\bar{\mathcal{P}}$ есть универсальный морфизм в группу.

<u>Теорема 3.2</u>. Универсальное действие $(\bar{\mathcal{P}},\bar{X})$ преддействия $(\mathcal{P},X)$ изоморфно действию $\underset{\overrightarrow{G}}{\lim}\pi$. Где $\underset{\overrightarrow{G}}{\lim}\pi$ есть левое расширение Кана функтора π над диаграммой G.

Нам понадобятся следующие ограничения на преддействие.

(A). Каждое множество C, где $C\in Ob\mathcal{P}$, замкнуто в пространстве X и для любой последовательности $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ частичных гомеоморфизмов из $\mathcal{P}$, частичный гомеоморфизм $\sigma_1*\sigma_2*\dots*\sigma_n$ имеет замкнутые прообраз и образ.

(B) Каждое $A \in Ob\mathcal{P}$ есть бикомпактное подмножество в X.

(C) Каждое $A \in Ob\mathcal{P}$ есть конечное множество в X.

Преддействие с условием (A) будем называть замкнутым. Ясно, что если X хаусдорфово, то каждое преддействие с условием (B) замкнуто.

<u>Лемма 3.8.</u> Если $q: (\mathcal{P}_1, X_1) \to (\mathcal{P}_2, X_2)$ есть вложение (в смысле определения 3.5), то индуцированный морфизм между универсальными действиями также есть вложение.

Пусть задано преддействие $(\mathcal{P}, X)$. Если X вполне регулярное пространство и βX — его максимальное бикомпактное расширение, то замыкание множества $A \subseteq X$ в пространстве βX обозначим через $[A]\beta X$. Допустим, что каждое $\sigma: A \to B$ из группоида $\mathcal{P}$ можно продолжить в гомеоморфизм $\beta\sigma: [A]\beta X \to [B]\beta X$. (Это так, если каждое $A \in Ob\mathcal{P}$ вполне замкнуто (см.[25]) в X). Тогда, как легко проверить, мы получим некоторое преддействие $\beta\mathcal{P}$ на пространстве βX и естественное вложение $(\mathcal{P}, X) \to (\beta\mathcal{P}, \beta X)$.

Заметим, что всякое бикомпактное подмножество вполне замкнуто, поэтому из леммы 3.8 и теоремы 3.3 следует

<u>Предложение 3.3.</u> Если X (вполне) регулярное пространство, а $(\mathcal{P}, X)$ преддействие с условием (B), то пространство $\overline{X}$ универсального действия (вполне) регулярно.

Если X есть T_1-пространство, то и $\overline{X}$ является T_1-пространством (без всяких ограничений на преддействие).

С помощью леммы 3.7 доказывается

<u>Лемма 3.9.</u> Если $(\mathcal{P}, X)$ замкнутое преддействие, то каж-

дое множество X_g замкнуто в пространстве $\overline{X}$.

Докажем теперь сохранение размерности $\dim$ и свойств типа нормальности для замкнутых преддействий. Доказательство во многом аналогично случаю свободных однородных пространств[6] В частности, следующие определения подсказаны цитируемой работой.

1. Подмножество $A \subseteq \overline{X}$ называется F-множеством, если A является свободным объединением своих подмножеств $A \cap X_g$, $g \in \overline{\mathcal{P}}$.

Ясно, что всякое замкнутое или открытое множество пространства $\overline{X}$ есть F-множество.

2. Для двух данных пространств X и Y запись $X \tau Y$ означает, что каково бы ни было замкнутое подмножество $F \subseteq X$ любое непрерывное отображение $f_0 : F \to Y$ допускает непрерывное продолжение $f : X \to Y$.

Предложение 3.4. Пусть $(\mathcal{P}, X)$ — замкнутое преддействие, A — F-множество и Y — такое топологическое пространство, что $(A \cap X_g) \tau Y$ для любого $g \in \overline{\mathcal{P}}$. Тогда $A \tau Y$.

Доказательство. Пусть задано непрерывное отображение $f : M \longrightarrow Y$, где M замкнутое подмножество в A. Сужение отображения f на множестве $M \cap X_e$ обозначим через f_0. Так как $(A \cap X_e) \tau Y$ и $M \cap X_e$ замкнуто в $A \cap X_e$, то существует непрерывное отображение $\overline{f}_0 : A \cap X_e \to Y$, продолжающее f_0. Пусть $n \geqslant 0$ и предположим, что для любого $0 \leqslant k \leqslant n$ существует такое непрерывное отображение $\overline{f}_k : A_k \longrightarrow Y$, что $A_k = \bigcup \{ A \cap X_g : g \in L_k \}$ и сужение отображений $\overline{f}_k$ и f на $M \cap A_k$ совпадают.

Пусть $g = \sigma_1 \cdots \sigma_n \sigma_{n+1}$ — редуцированное представление. Положим $\check{g} = \sigma_1 \cdots \sigma_n$ (если $n = 0$, то $\check{g} \equiv e$). Рассмотрим отображение φ_g множества $(A\cap X_g^{\vee}\cap X_g)\cup(M\cap X_g)$ в Y, где

$$\begin{cases} x \longmapsto f(x) & \text{,если } x\in M\cap X_g \\ x\longmapsto \overline{f}_n(x) & \text{,если } x\in A\cap X_g^{\vee}\cap X_g \end{cases}$$

Множество $A\cap X_g^{\vee}\cap X_g$ замкнуто в пространстве $A\cap X_g$. (лемма 3.9). Множество $M\cap X_g$ также замкнуто в $A\cap X_g$, поэтому φ_g есть непрерывное отображение. Так как $(A\cap X_g)\tau Y$, то существует непрерывное отображение $\overline{\varphi_g}: A\cap X_g\to Y$, продолжающее φ_g. Если $h\in L_{n+1}$ и $h\neq g$, то из леммы 3.7 следует, что $X_h\cap X_g\subseteq X_g^{\vee}\cap X_h$. Отсюда, ясно, что сужения отображений $\overline{\varphi_h}$ и $\overline{\varphi_g}$ на $A\cap X_h\cap X_g$ совпадают. Ввиду этой согласованности, с помощью φ_g и $\overline{f}_n$ на множестве $A_{n+1}=\cup\{A\cap X_g: g\in L_{n+1}\}$ очевидным образом определяется отображение $\overline{f}_{n+1}: A_{n+1}\to Y$, продолжающее $\overline{f}_n$ и на пересечении $M\cap A_{n+1}$, совпадающее с f. Ввиду того, что A есть F-множество, отображение $\overline{f}_{n+1}$ непрерывно. Мы можем продолжить построение по индукции. Тогда прямой предел отображений $\{\overline{f}_n: n\in\mathbb{N}\}$ есть нужное нам продолжение отображения f.

<u>Теорема 3.3</u>. Пусть преддействие $(\mathcal{P},X)$ замкнуто и пространство X нормально (наследственно нормально, совершенно нормально). Тогда пространство $\overline{X}$ тоже нормально (наследственно нормально, совершенно нормально).

Если в доказательстве предложения 3.4, $Y=[0,1]$, X совершенно нормально и f — отображение замкнутого множества $F\subseteq\overline{X}$ в $[0,1]$ принимающее постоянное значение 0, то ясно, что продолжение $\overline{f}: \overline{X}\to[0,1]$ можно выбрать так, что $\bar{f}(x)=0 \iff x\in F$. Отсюда, получается совершенная нормальность $\bar{X}$.

При доказательстве теоремы 3.3 используется тот факт, что наследственность нормальности эквивалентна нормальности всех открытых подмножеств.

Теорема 3.4. Если $(\mathcal{P},X)$ замкнутое преддействие, X нормально и $\dim X\leq n$, то и $\dim\bar{X}\leq n$.

Замечание. Для Ind и ind аналог теоремы 3.4 уже неверен даже, если преддействие удовлетворяет условию (B). Соответствующие примеры легко строятся на основе того факта, что теорема конечной суммы для Ind и ind неверна [I].

Теорема 3.5. Пусть $(\mathcal{P},X)$ — преддействие с условием (C). Тогда

$$\mathrm{Ind}\,X\leq n \Rightarrow \mathrm{Ind}\,\bar{X}\leq n$$
$$\mathrm{ind}\,X\leq n \Rightarrow \mathrm{ind}\,\bar{X}\leq n.$$

При доказательстве используются леммы 3.6, 3.7, 3.9, а также тот факт, что при нашем предположении, пересечение $X_g\cap X_h$ (при разных g и h) конечно.

Теорема 3.6. Пусть $(\mathcal{P},X)$ — преддействие с условием (C) и A есть F- множество. Если для любого $g\in\bar{\mathcal{P}}$ множество $A\cap X_g$ — паракомпакт, то A тоже паракомпакт. В частности, если X — (насл.) паракомпакт, то и $\bar{X}$ — (насл.) паракомпакт.

Доказательство проводится по следующей схеме:

I. Сужение отображения $S:\tilde{X}\to\bar{X}$ на подмножество $R_n\equiv\cup\{X'_g : \ell(g)=n\}$, является замкнутым отображением для любого $n\geqslant 0$.

2. Теорема Майкла о сохранении паракомпактности при замкнутых отображениях.
3. Для любого открытого покрытия P пространства A и открытого локально конечного покрытия Q пространства $S(R_n)\cap A$ вписанного в P, существует такая открытая локально конечная система M пространства A, что $Q \succ M \succ P$ и след системы M на множестве $S(R_n)\cap A$ совпадает с покрытием Q.
4. В каждое открытое покрытие пространства A можно вписать открытое σ-локально конечное покрытие.

<u>Определение 3.6</u>. Преддействие $(\mathcal{P}, X)$ называется транзитивным, если для любых элементов x, y пространства X существует последовательность точек $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ пространства X и последовательность $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_n$ морфизмов из $\mathcal{P}$, что $\sigma_i(x_i) = x_{i+1}$ для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$.

<u>Предложение 3.5</u>. Универсальное действие $(\overline{\mathcal{P}}, \overline{X})$ транзитивно в точности тогда, когда транзитивно преддействие $(\mathcal{P}, X)$.

<u>Замечание</u>. Определенные нами преддействия $(\mathcal{P}_\Sigma, X)$ и $(\mathcal{P}_K, X)$ транзитивны (см.пример 3.2), поэтому универсальные действия $(\overline{\mathcal{P}}_\Sigma, \overline{X}_\Sigma)$ и $(\overline{\mathcal{P}}_K, \overline{X}_K)$ транзитивны. Однако, вообще говоря, не ясно будут ли пространства X_Σ и X_K соответственно Σ-однородным или K-однородным. Поэтому мы строим такие пространства последовательным применением нашей конструкции. При этом возникает прямой спектр действий, предел которого и будет нужное пространство.

Для определения нужного спектра введем по индукции некоторые обозначения. Пусть $(\mathcal{P}_K^{(1)}, X_K^{(1)})$ есть преддействие $(\mathcal{P}_K, X)$. Если преддействие $(\mathcal{P}_K^{(n)}, X_K^{(n)})$ уже определено, то морфизм $p_n = (u_n, i_n) : (\mathcal{P}_K^{(n)}, X_K^{(n)}) \to (\overline{\mathcal{P}_K^{(n)}}, \overline{X_K^{(n)}})$ есть каноническое вложение в универсальное действие. Преддействие $(\mathcal{P}_K^{(n+1)}, X_K^{(n+1)})$ строится с помощью действия $(\overline{\mathcal{P}_K^{(n)}}, \overline{X_K^{(n)}})$ следующим образом: $X_K^{(n+1)} \equiv \overline{X_K^{(n)}}$ и $\mathcal{P}_K^{(n+1)} \equiv \overline{\mathcal{P}_K^{(n)}} \sqcup M_n$ где M_n есть множество всех таких частичных гомеоморфизмов $\sigma : A \to B$, что A и B бикомпактные подмножества в пространстве $X_K^{(n+1)}$. Пусть $q_n : (\overline{\mathcal{P}_K^{(n)}}, \overline{X_K^{(n)}}) \to (\mathcal{P}_K^{(n+1)}, X_K^{(n+1)})$ естественное вложение, $j_n = p_{n+1} \circ q_n$ и $j_n^m \equiv j_{m-1} \circ \dots \circ j_{n+1} \circ j_n$ $(m > n)$. Так мы получим прямой спектр действий:

$$\left\{ j_n^m : (\overline{\mathcal{P}_K^{(n)}}, \overline{X_K^{(n)}}) \longrightarrow (\overline{\mathcal{P}_K^{(m)}}, \overline{X_K^{(m)}}) \right\}$$

Прямой предел этого спектра есть действие (G, X_K), где $G \equiv \bigcup \{ \overline{\mathcal{P}_K^{(n)}} : n \in \mathbb{N} \}$ и $X_K \equiv \bigcup \{ \overline{X_K^{(n)}} : n \in \mathbb{N} \}$. При этом, данное пространство X естественным образом вложено в X_K. Для любого частичного гомеоморфизма $\sigma : A \to B$, где A и B бикомпактные подмножества в X_K, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что σ есть частичный гомеоморфизм пространства $\overline{X_K^{(n_0)}}$. Отсюда ясно, что X_K есть K-однородное пространство, топологически содержащее данное пространство X.

Совершенно аналогично можно получить вложение данного пространства X в Σ-однородное пространство X_Σ.

<u>Замечание</u>. Выше мы получили результаты для преддействий с условиями (B) и (C). Если в этих условиях ограничения на выбор подпространств делать только для истинных подпрост-

ранств,то результаты остаются верными.

Имея в виду это замечание и используя полученные результаты, с помощью некоторых дополнительных рассуждений(которые во многом аналогичны проводимым выше) получаем следующие теоремы.

Теорема 3.7. Всякое (вполне) регулярное пространство замкнуто вкладывается в K- однородное (вполне) регулярное пространство X_K. Если X удовлетворяет одному из следующих условий, то соответствующему условию удовлетворяет X_K.

а) X (наследственно, совершенно) нормально; б) X нормально и $\dim X=n$.

Теорема 3.8. Всякое T_1- пространство X вкладывается в Σ- однородное T_1- пространство X_Σ. Если X удовлетворяет одному из следующих условий, то и X_Σ удовлетворяет соответствующему условию: а) X (вполне) регулярно; б) X (наследственно,совершенно) нормально; в) X нормально и $\dim X=n$; г) $\operatorname{Ind} X=n$; д) $\operatorname{ind} X=n$; е) X (наследственно) паракомпактно.

Теорема 3.9. Всякое нормальное G- пространство X (где G — дискретно) размерности $\dim X=n$ эквивариантно вкладывается в некоторое транзитивное действие (G', X') ,где X' нормально и $\dim X'=n$.

В работе Бельнова [6] для любого топологического пространства X построено свободное однородное пространство $(G(X),H(X),h)$. Там же установлены некоторые важные свойства пространства $H(X)$.

Полученные нами результаты обобщают соответствующие результаты из [6]и одновременно дают следующее описание свободного однородного пространства.

Теорема 3.10. Универсальное действие преддействия $(\mathcal{P}_B, X)$ (см.пример 3.2 (ii)) есть свободное однородное пространство пространства X.

Этот результат вместе с теоремой 3.2 дает реализацию свободного однородного пространства с помощью расширения Кана.

Дадим еще одно приложение полученных результатов. В работе [6] строятся примеры однородных пространств с патологическими размерностными свойствами. Аналогично этому, с помощью теорем 3.7, 3.8, мы можем построить Σ-однородные (K-однородные) пространства с соответствующими патологическими размерностными свойствами. Проиллюстрируем это на следующем результате.

Пусть X паракомпакт Лифанова [6], для которого $\operatorname{ind} X < \dim X < \operatorname{Ind} X$. Тогда, в силу теоремы 3.8, X_Σ есть Σ-однородный паракомпакт, для которого

$$\operatorname{ind} X_\Sigma < \dim X_\Sigma < \operatorname{Ind} X_\Sigma .$$

Отметим, что некоторые применения свойств свободного однородного пространства даются в работах Н.Г.Окромешко[20] и Л.Г.Замбахидзе [12]. Вложению топологических пространств в однородные, посвящены работы [19] и [44].

§ 7. B-эквивалентные пространства

В данном параграфе рассматриваем только T_1-пространства.

Пусть $B(X) \equiv (G(X), H(X), h_X)$ обозначает свободное однородное пространство [6] пространства X.

I. Топологические пространства $X; Y$ называются B-

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. - М.:"Наука", 1973. - 575 с.
2. Антонян С.А. Классификация бикомпактных G-расширений с помощью колец эквивариантных отображений. Докл.АН Арм. ССР, 1979, т.69, № 5, с.260-264.
3. Антонян С.А., Смирнов Ю.М. Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований. Докл.АН СССР, 1981, т.257, № 3, с.521-526.
4. Архангельский А.В. О соотношениях между инвариантами топологических групп и их подпространств. УМН, 1980, т.35, № 3, с.3-22.
5. Баладзе В.Х. Факторизационные и аппроксимационные теоремы для непрерывных групп преобразований. Сообщ.АН Груз.ССР, 1983, т.109, № 2, с.257-261.
6. Бельнов В.К. Размерность топологически однородных пространств и свободные однородные пространства. Докл.АН СССР, 1978, т.238, № 4, с.781-784.
7. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. - М.: "Наука", 1980. - 440 с.
8. Бронштейн И.У. Расширения минимальных групп преобразований.- Кишинев: "Штиинца", 1975. - 310 с.
9. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. - М.:"Наука", 1968, - 272 с.
10. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. - М.: "Наука", 1969, - 392 с.

II. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. - М.: "Наука", 1975, - 408 с.

I2. Замбахидзе Л.Г. О размерностях, основанных на дизъюнктных системах открытых подмножеств топологических пространств. Сообщ.АН Груз.ССР, 1982, т.I08, № 2, с.28I-284.

I3. Катетов М. О размерности несепарабельных пространств. I. Чехослов.матем.ж., 1952, т.2, № 4, с.333-368.

I4. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология.-М.:"Мир", 1977, 342 с.

I5. Мегрелишвили М.Г. Топологические пространства с изоморфными свободными однородными пространствами. Сообщ.АН Груз. ССР, 198I, т.I03, № 3, с.549-552.

I6. Мегрелишвили М.Г. Об эквивариантной нормальности. Сообщ. АН Груз.ССР, 1983, т.III, № I, с.I7-I9.

I7. Мегрелишвили М.Г. Факторизационная теорема и универсальные бикомпакты для G-пространств. УМН, 1983, т.38, № 6, с.II7-II8.

I8. Мегрелишвили М.Г. Эквивариантные пополнения и бикомпактные расширения. Сообщ. АН Груз.ССР, 1984, т.II5, № I, с.2I-24.

I9. Мищенко А.С. О размерности групп с левоинвариантной топологией. Докл. АН СССР, 1964, т.I59, № 4, с.753-754.

20. Окромешко Н.Г. О ретракциях однородных пространств. Докл. АН СССР, 1983, т.268, № 3, с.548-55I.

2I. Пасынков Б.А. Факторизация отображений на метрические пространства. Докл.АН СССР, 1968, т.I82, № 2, с.268-27I.

22. Пасынков Б.А. О спектральной разложимости топологических пространств. Матем.сб., 1965, т.66, № I, с.35-79.

23. Райков Д.А. О пополнении топологическтх групп. Изв.АН СССР, 1946, т.IO, с.5I3-528.

24. Смирнов Ю.М. О пространствах близости. Матем.сб.,1952, т.3I, № 3, с.543-574.

25. Смирнов Ю.М. О размерности пространств близости.Матем.сб., 1956, т.38, № 3, с.283-302.

26. Смирнов Ю.М. Об эквивариантных вложениях -пространств. УМН, 1976, т.3I, № 5, с.I37-I47.

27. Brook R. A construction of the greatest ambit.Mathem. Systems Theory, 1970, v.4, No.4, p.243-248.

28. Carlson D. Extensions of dynamical systems vid prolongations. Funkcial. Ekvac., 1971, v.14, p.35-46.

29. Groot J. de. The action of a locdlly compact group on a metric Space. Nieuw Archief voor Wiskunde, 1959, v.7, No. 3, p.70-74.

30. Groot J. de, Mcdowell R. Extension of mappings on metric Spaces. Fund. Math., 1960, v.XLVIII, p.251-263.

31. Isbell J. Uniform spaces. AMS, Providence, 1964, p.175.

32. Kulpa W. On uniform universal spaces, Fund.Math.,1970, v.69, p.243-251.

33. Kulpa W. Maps and inverse systems of metric spaces. Fund. Math., 1973, v.80, p.145-151.

34. Ludescher H., Vries J. de. A sufficient condition for the existense of a G -compactification. Proc.Kon. Nederl. Akad. Wet. Ser. A, 1980, v.83, p.263-268.

35. Maclane S. Categories for the working mathematician., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New Jork, 1971.

36. Mardesic S. On covering dimension and inverse limits of compact spaces. Illinois j. Math., 1960, v.4, No.2, p.278-291.

37. Montgomery D., Zippin L. Topological transformation groups. N.Y.Interscience, 1955.

38. Morita K. Normal families and dimension theory in metric spaces. Math. Ann., 1954, v.128, No.4, p.350-362.

39. Nagata J. On universal n-dimensional set for metric spaces. J. reine angew. Math., 1960, v. 204, p.132-138.

40. Nagata J. Modern dimension theory. Amsterdam, North-Holland Publishing co., 1965.

41. Palais R. The classification of G-spaces. Memoires Amer. Math. Soc., 1960, 36, p.72.

42. Quillen D. The spectrum of an equivariant cohomology ring.I. "Ann.Math.", 1971, v.94, No.3, p.549-572.

43. Deo S., Tripathi H. Compact Lie group actions on finitistic spaces. "Topology", 1982, v.21, No.4, p.393-399.

44. Shimrat M. Embedding in homogeneous spaces. Quart.J.Math. Oxford (2), 1954, v.5, p.304-311.

45. Smirnov Yu. Some topologival aspects of the theory of topological transformation groups. General Topology and its Relations to Modern Analysis an Algebra 1V, Lecture Notes in Mathematics 609, 1977, p.196-204.

46. Smirnov Yu. Compactifications, dimension and absolutes of topological transformation groups.- in: Proc. of the Conference Topology and Measure III. Greifawald 1982, part 2, p.259-266.

47. Vries J. de. Topological transformation groups I. Math. Centre Tracts, No.65, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.

48. Vries J. de. Universal topologival transformation groups. Gen. topology and appl. 1975, v.5, No.2, p.107-122.

49. Vries J. de. Equivariant embeddings of G-spaces.-in:General topology and its relations to modern Analysis and algebra IV, part B, Prague 1977, p.485-493.

50. Vries J. de. On the existense of G-compactifications. Bull.Acad Polon. Sci. Ser. Math., 1978, v.26, p.275-280.

51. Vries J. de. Linearizarion , compactification and the existense of non-trivial compact extensors for topolofical transformation groups. - in: Proc.conf. Topology and measure III, Greifswald, 1982, p.339-346.

52. Vries J. de. On the G-compactification of products. Pacif. j. Math. , 1983, v.110, No. 1. p 447-470 .