

תרגיל 5

1. בכמה מספרים שש ספרתיים מופיעה הספרה:
 - א. 0 פעם אחת בדיוק;
 - ב. 4 פעם אחת לפחות;
 - ג. 0 פעם אחת לפחות;
 - ד. 4 פעם אחת בדיוק.
2. בכמה אופנים שונים ניתן להושיב בספסל (בן 10 מושבים) 5 זוגות נישואים בתנאי ש-
 - א. כל אחד רשאי לשבת בכל מושב (אבל בכל מושב יושב בו זמנית רק בן אדם אחד בלבד);
 - ב. בקצוות יושבים גברים;
 - ג. בין כל שני גברים יושבת אישה;
 - ד. כל הנשים יושבות אחת ליד השניה;
 - ה. כל אישה יושבת לצד בעלה.
3. חזור על השאלה 2 כאשר במקום הספסל מדובר בשולחן עגול.
4. יהי $k > 0$ מספר כלשהו. נתונים $10k$ כדורים שונים.
 - א. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל- k תאים שונים?
 - ב. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל- k תאים שונים כך שבכל תא יהיו 10 כדורים בדיוק?
 - ג. בכמה דרכים ניתן לחלק אותם ל- k תאים זהים כך שבכל תא יהיו 10 כדורים בדיוק?
5. יהי $n > 0$. בכמה דרכים ניתן לחלק $2n$ כדורים לבנים ו- n כדורים צבעוניים (ב- n צבעים שונים) ל-
 - א. $3n$ תאים, כדור אחד בכל תא;
 - ב. $3n$ תאים, כדור לבן אחד לכל היותר בכל תא;
 - ג. n תאים, מספר שווה של כדורים לבנים וצבעוניים בכל תא.
6. בכמה אופנים שונים ניתן להושיב n אנשים בספסל בן k מקומות? יש להבדיל בין המקרים $n \leq k$ ו- $n > k$.
7. מהו מספר החלוקות של מספר כלשהו של כדורים זהים ל- n תאים שונים, אם מספר הכדורים בכל תא (פרט לראשון) צריך להיות יותר גדול ממספר הכדורים בתא שלפניו, ובכל תא אפשר לשים לכל היותר k כדורים.
8. בכמה דרכים ניתן לבחור k שלמים מתוך הקבוצה $\{1, \dots, n\}$ כך שלא יהיה אף זוג שלמים עוקבים.

9. מ-3 סטודנטים של שנה א, 5 סטודנטים של שנה ב, 4 סטודנטים של שנה ג ו-2 מסטרנטים מרכיבים ועד. בכמה אופנים שונים ניתן לעשות זאת אם:

- א. בועד יש 4 אנשים;
- ב. בועד יש נציג אחד לכל אחת מהקבוצות הנ"ל;
- ג. בועד יש 2 אנשים : נציג אחד לתלמידי שנים א ו-ב ו נציג אחד לתלמידי שנה ג ולמסטרנטים;
- ד. בועד יש 3 אנשים שהם נציגים של 3 קבוצות שונות.

10. אני מעוניין לחלק k מטבעות של שקל בין n ילדים. לא משנה כמה שקלים מתוך ה- k נותנים לכל ילד (בין 0 ל k). בכמה דרכים שונות ניתן לבצע החלוקה?

11. הוכח ש

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$$

תן שתי הוכחות, אחת קומבינאטורית, ואחת בשימוש הנוסחה האלגברית למקדמים בינומיים.

12. הוכח ש שתי דרכים (אלגברית וקומבינאטורית) ש $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

13. הוכח באופן קומבינאטורית שעבור $0 \leq m \leq k \leq n$ נכון ש

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$