

פתרון לתרגיל 3

1. א. הפונקציה על אך לא חח"ע ולכן לא הפיכה.

ב. הפונקציה על וחח"ע ולכן הפיכה

ג. הפונקציה לא על אך כן חח"ע. הפונקציה לא הפיכה.

ד. הפונקציה על וחח"ע ולכן הפיכה.

2. על פי הנתונים $g : B \rightarrow C, f : A \rightarrow B$ לכן $f^{-1} : B \rightarrow A, g^{-1} : C \rightarrow B$ כמו כן

$(g \circ f) : A \rightarrow C$ ו $(g \circ f)^{-1} : C \rightarrow A$ ו $f^{-1} \circ g^{-1} : C \rightarrow A$ מתקיים ש

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ id_b \circ g^{-1} = id_c$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ id_b \circ f = id_a$$

לכן $(g \circ f)$ הפיכה וההופכית שלה היא $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. א+ב, ניקח $A = \{1\}, B = \{3, 7\}, C = \{5\}$ ונגדיר $f(1) = 3$ וכן $g(3) = g(7) = 5$.

ונקבל ש f חח"ע ולא על. g על אך לא חח"ע. כמו כן מתקיים :

$$(g \circ f)(1) = g \circ (f(1)) = g(3) = 5$$

4. א. יהיו $A_1, A_2 \subseteq X$, נראה ש $A_1 \subseteq A_2$ וגם $A_2 \subseteq A_1$ ולכן $A_1 = A_2$. נניח שמתקיים

$$F(A_1) = F(A_2)$$

יהי $x \in A_1$ נראה ש $x \in A_2$.

$f(x) \in F(A_1) = F(A_2)$ לכן קיים $x' \in A_2$ כך ש $f(x) = f(x')$. כיוון ש f חח"ע

נקבל ש $x = x'$ ולכן $x \in A_2$. קיבלנו ש $A_1 \subseteq A_2$. לכן, על ידי החלפת האינדקסים, נקבל

$A_2 \subseteq A_1$ ולכן $A_1 = A_2$. קבלנו ש f חח"ע.

ב. נתון ש f על Y , אז הטווח של f הוא כל הקבוצה Y . לכל $y \in Y$ קיים $x \in X$ כך

ש $f(x) = y$. על פי הגדרת הפונקציה F באופן הבא $F : P(X) \rightarrow P(Y)$ על ידי

$$F(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \text{ לכל } A \in P(X). \text{ צריך להוכיח } F \text{ על } P(Y).$$

תהי $B \in P(Y)$ (זאת אומרת ש $B \subseteq Y$). תהי $A := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$. $A \in P(X)$, איבר כללי של $F(A)$ הוא $f(x)$ כאשר $x \in A$. אם $x \in A$ אז מהגדרת A נקבל ש $f(x) \in B$ ולכן $F(A) \subseteq B$.
 נוכיח ש $B \subseteq F(A)$. כיוון ש $B \subseteq Y$ ו f על Y לכן לכל $y \in B$ קיים $x \in X$ כך ש $y = f(x)$. בפרט $x \in A$ ו $y \in F(A)$ לכן $B \subseteq F(A)$. כלומר $F(A) = B$ וקבלנו ש F על $P(Y)$.

5. א. נפריד על ידי כך שניקח $X = \{1\}, Y = \{3, 4\}$ כך ש $f(1) = 3$. הפונקציה f חח"ע. מתקיים ש $P(X) = \{\emptyset, \{1\}\}, P(Y) = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$. מתקיים ש $F'(\{3\}) = F'(\{3, 4\})$ לכן הפונקציה F' לא חח"ע.

ב. נפריד על ידי כך שניקח $X = \{1, 2\}, Y = \{4\}$ כך ש $f(1) = f(2) = 4$. הפונקציה f על. מתקיים ש $P(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, P(Y) = \{\emptyset, \{4\}\}$. אנו מקבלים ש $\{1\}$ לא בטווח של F' ולכן F' לא על $P(X)$.